UEB Bonus live

Mittwoch, 7. Februar 2024 11:47

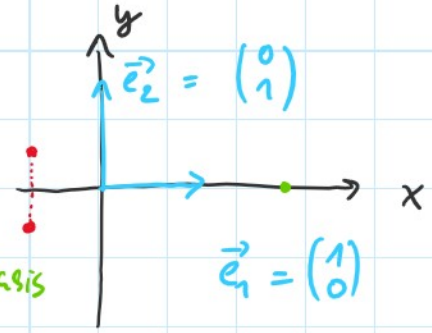
B 1a) $\mathbb{R}^n \xrightarrow[A]{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow[B]{g} \mathbb{R}^m$, $f(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$

$g(y) = By$, $y \in \mathbb{R}^k$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

$$= g(Ax) = B \cdot (Ax) = (BA)x$$

B1b) Nach VL ist eine lin. Abb. durch Bilder auf der Standardbasis festgelegt.



Standardbasis

Definiere : $s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $s(\vec{e}_1) := \vec{e}_1$, $s(\vec{e}_2) := -\vec{e}_2$

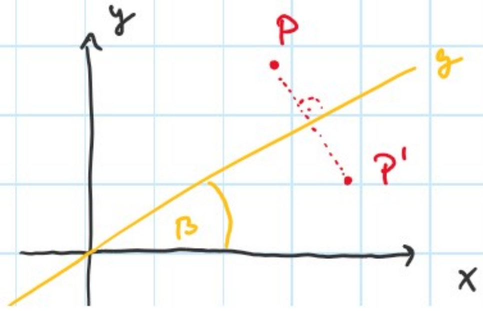
Damit gilt: $s(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \, \vec{e}_2$

$$s(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + (-1)\,\vec{e}_2$$

Also Matrix von s : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: S$

Es gilt also : $s(\underbrace{x,y}_{\in \mathbb{R}^2}) = S \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

B1c)



Wir spiegeln P am g zum Spiegelpunkt P', indem wir

Spiegelpunkt T, indem wir

P um den Winkel $-\beta$ drehen, dann an x-Achse spiegeln, dann um β zurückdrehen. Die Drehmatrix an einem Winkel α lautet $D_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

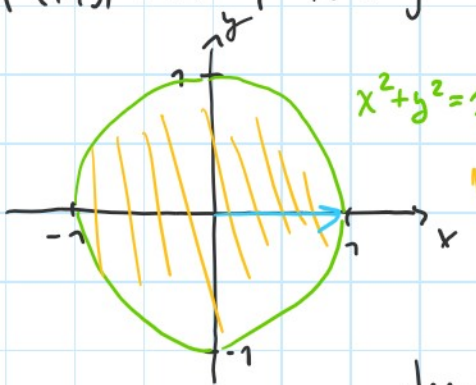
Also ist s_β folgende Komposition:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{D_{-\beta}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{s} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{D_\beta} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto D_{-\beta}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto S D_{-\beta}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{D_\beta S D_{-\beta}}_{\text{Matrix von } s_\beta}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

B2a)

$W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^2$



$x^2+y^2=1$ (Kreis um $(0,0)$ mit Radius 1)

W

W ist kein UVR von $\mathbb{R}^2$,

denn: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ aber

für $\lambda := 2$ ist $2\vec{e}_1 \notin W$ (denn $2^2 + 0^2 = 4 \nleq 1$)

B2b) $U := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_3 , x_2 = 0 \}$

$= \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_3 = 0 , x_2 = 0 \}$

$$= \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_3 = 0 , x_2 = 0 \}$$

Definiere: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2,x_3) := (x_1 - 2x_3 , x_2)$

Damit gilt: $\ker f \overset{\text{Def}^n}{=} \{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_1,x_2,x_3) = (0,0) \}$

$$= U$$

Also ist $U \subset \mathbb{R}^3$ nach VL UVR von $\mathbb{R}^3$.

Bestimme Matrix von f: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

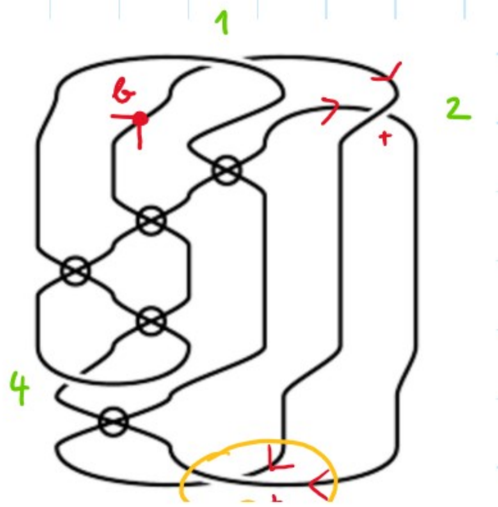
Damit gilt $f(x_1,x_2,x_3) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und daher

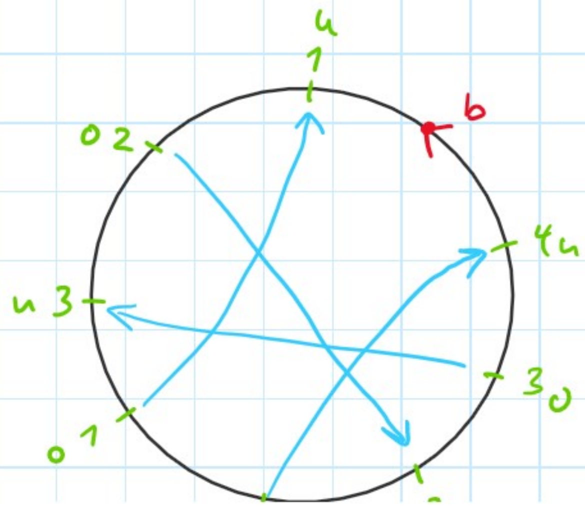
$$\ker f = \mathbb{L}_{(A|0)} \overset{\text{VL}}{=} \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

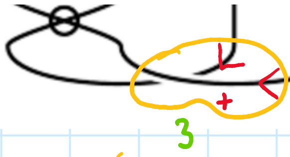
$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

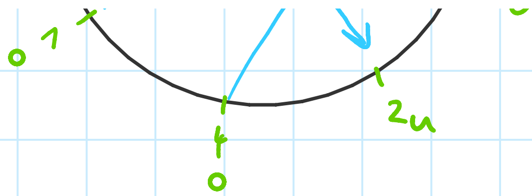
Also $\dim \ker f = 1$.

B3)









$\mathrm{odd}(D) = \{2, 3\}$ $\quad W_{odd}(D) = (+1) + (+1) = 2$