23.10.12

Donnerstag, 12. Oktober 2023 12:01

1.1.1 Einführung

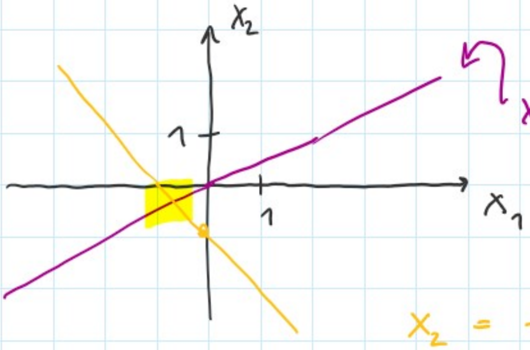
Was ist ein lineares Gleichungssystem (LGS)?

Sammlung endlich vieler linearer Gleichung in Variablen x_i, zum Bsp: $3x_1 = 7$, $x_1 + x_2 = -1$,

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_2 - x_1 = 0 \end{array} \right| , \quad \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_4 + x_1 = -1 \end{array} \right|$$

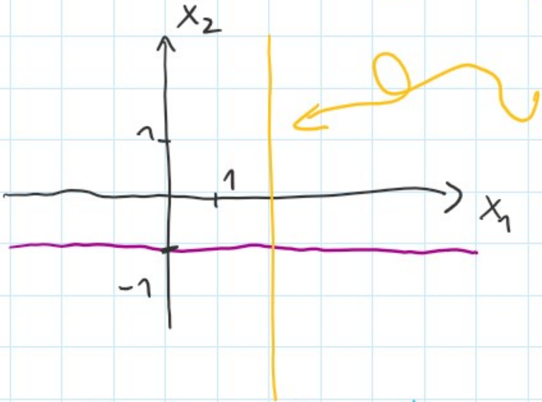
Nicht-lineare GLS sind zum Bsp: $\left| \begin{array}{l} x_1^2 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{array} \right|$

2-"dimensionale" Geometrie



$x_2 = \frac{1}{2}x_1 \iff -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 0$

$x_2 = -x_1 - 1 \iff x_1 + x_2 = -1$



$x_1 = 2$

$x_2 = -1$

Lösungsmethode Einsetzungsverfahren

$$\left| \begin{array}{l} x_2 + x_1 = -1 \\ 2x_2 - x_1 = 0 \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{l} x_2 + x_1 = -1 \\ x_1 = 2x_2 \end{array} \right| \rightsquigarrow x_2 + 2x_2 = -1$$

$$\Rightarrow 3x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = 2\left(-\tfrac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow 3x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = -1 - (-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$

Also $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_1 = -\frac{2}{3}$ ist die Lösung.

Lösungsmethode Additionsverfahren

$$\left|\begin{array}{l} x_2 + x_1 = -1 \\ 2x_2 - x_1 = 0 \end{array}\right| \oplus \rightsquigarrow \left|\begin{array}{l} 3x_2 = -1 \\ 2x_2 - x_1 = 0 \end{array}\right| \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{3} \\ x_1 = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Reelle n-Tupel Ein n-Tupel ist eine geordnete Auflistung $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ reeller Zahlen $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$. Die Menge aller n-Tupel ist

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Auf $\mathbb{R}^n$ kann man komponentenweise eine Addition definieren: $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$ und analog für $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Damit sind diese Verknüpfungen assoziativ, kommutativ, distributiv, denn diese Gesetze gelten ja in $\mathbb{R}$ (den Komponenten).

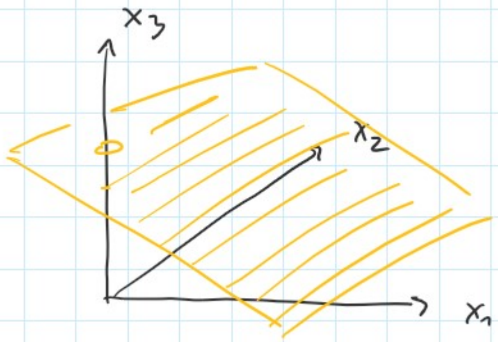
Lösungsmenge Hat ein LGS die Variablen/Unbekannte $x_1, \dots, x_n$ so wird die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, also $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^n$, angegeben. Also oben:

$\mathbb{L} = \{(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})\} \subset \mathbb{R}^2$

von $\mathbb{K}$, also $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$, angegeben. Also oben:

$\mathbb{L} = \{ (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) \} \subset \mathbb{R}^2$

3-"dimensionale" Geometrie Eine Gleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = b$ in den Variablen x_1, x_2, x_3 beschreibt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.



Die Lösungsmenge ($\mathbb{L}$) eines LGS mit 3 Variablen entspricht dem Schnitt von Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Also: 1) $\mathbb{L} = \emptyset$, 2) $\mathbb{L}$ = Gerade, 3) $\mathbb{L}$ = Ebene

⇝ Beweise später

n-"dimensionale" Geometrie ⟿ Vektorräume (später)

Beispiel 1 Zur Auflistung von Internetseiten nach einer Google-Suche wird der Pagerank-Algorithmus verwendet. Dabei muss ein LGS mit $m \in \mathbb{N}$ Gleichungen und $n \in \mathbb{N}$ Variablen gelöst werden. Dabei n = Anzahl Internetseiten

Definition 2 Ein LGS ist eine Menge von Gleichungen

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + \cdots & + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + \cdots & + & a_{mn} x_n & = & b_m \end{array} \right|$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$. Wir schreiben auch

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Falls alle $b_i = 0$ dann heißt das LGS <u>homogen</u>.

1.1.2 Elementare Zeilenumformungen

Definition 3 <u>Elementare Zeilenumformungen</u> (<u>eZU</u>) sind

V_{ij} = Vertausche Gleichungen i und j

$M_i(\lambda)$ = Multiplikation Gleichung i mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

$E_{ij}(\lambda)$ = Multiplikation Gleichung j mit $\lambda \neq 0$ <u>und</u> Addition auf Gleichung i

Beispiel 4

$$\begin{array}{l} 1) \\ 2) \\ 3) \end{array}\left|\begin{array}{rrrl} & x_2 & + 3x_3 & = 10 \\ 5x_1 & - 3x_2 & + x_3 & = 5 \\ & -2x_2 & + 2x_3 & = -4 \end{array}\right| \overset{V_{12}}{\longmapsto} \left|\begin{array}{rrrl} 5x_1 & - 3x_2 & + x_3 & = 5 \\ & x_2 & + 3x_3 & = 10 \\ & -2x_2 & + 2x_3 & = -4 \end{array}\right| \mapsto$$

$$\overset{M_2(2)}{\longmapsto} \left|\begin{array}{rrrl} 5x_1 & - 3x_2 & + x_3 & = 5 \\ & 2x_2 & + 6x_3 & = 20 \\ & -2x_2 & + 2x_3 & = -4 \end{array}\right| \overset{E_{32}(1)}{\longmapsto} \left|\begin{array}{rrrl} 5x_1 & - 3x_2 & + x_3 & = 5 \\ & 2x_2 & + 6x_3 & = 20 \\ & & 8x_3 & = 16 \end{array}\right|$$

„Rückwärts auflösen": $x_3 = 2 \Rightarrow 2x_2 + 12 = 20$

$\Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 3$

$\Rightarrow \quad x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$

$\mathbb{L} = \{(3,4,2)\} \subset \mathbb{R}^3$

Satz 5 Die Lösungsmenge eines LGS bleibt unter eZU unverändert

Beweis später.