23.10.17

Mittwoch, 18. Oktober 2023 11:06

1.1.3 Matrizen

$\boxed{A \text{ über } \mathbb{R}}$

Definition 6 Eine <u>$m \times n$- Matrix</u> ist ein Zahlenschema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =: A$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$. Wir schreiben $A_{ij} := a_{ij}$

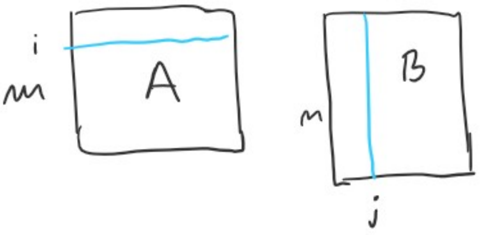
$\mathrm{Mat}_{m,n}(K) := \{ A \mid A \text{ ist } m \times n\text{-Matrix über } K \}$

Definition 7 Operationen an Matrizen

1) $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$: $(A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$ liefert $A+B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$

2) $\lambda \in K$, $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$: $(\lambda A)_{ij} := \lambda A_{ij}$ liefert $(\lambda A) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$

3) $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,e}(K)$:



$$(AB)_{ij} := \sum_{s=1}^{n} A_{is} B_{sj}$$

für $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1 \ldots e\}$ liefert $AB \in \mathrm{Mat}_{m,e}($

4) $(A^T) := A$, $A^T \in \mathrm{Mat}(K)$

4) $(A^T)_{ij} := A_{ji}$, $A^T \in Mat_{n \times m}(K)$

Satz 8 Sofern Operationen definiert sind gelten:

1) $A + B = B + A$

2) $A(B+C) = AB + AC$

3) $(A+B)C = AC + BC$

4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $(\lambda, \mu \in K)$

5) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda \in K)$

6) $A(BC) = (AB)$

7) $(AB)^T = B^T A^T$

Beweis Übung. Man führt die Beweise komponentenweise. Zu 4): Es sei $A \in Mat_{m \times n}$. Für alle $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ gilt:

$$((\lambda + \mu) \cdot A)_{ij} \overset{Dfn}{=} (\lambda + \mu) A_{ij} \overset{\in R}{=} \lambda A_{ij} + \mu A_{ij}$$

$$\underset{Dfn}{=} (\lambda A)_{ij} + (\mu A)_{ij}.$$ Also $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$. $\square$

Definition 9 Vorgelegt sei ein LGS mit m Gleichungen und n Unbekannten wie in Dfn (oben).

Die Koeffizientenmatrix zum LGS ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =: A$$ und die rechte Seite

$\backslash a_{m1} \quad — \quad a_{mn} /$

lässt sich als $b := (b_1 \cdots b_m)^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{A,b}$ ist .

$$\mathbb{L}_{A,b} := \{ (x_1, -, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i , \forall i \}$$

also $\mathbb{L}_{A,b} \subset \mathbb{R}^n$.

(eZU)

Beispiel 10

1) $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ sei Koeffizientenmatrix und $b \in \mathbb{R}^m$ sei rechte Seite, dann lässt sich das LGS schreiben als: $A \cdot x = b$ wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$. Damit können wir auch schreiben:

$$\mathbb{L}_{A,b} = \{ (x_1 - x_n)^T \in \mathrm{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{R}) \mid A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \}$$

2) Multiplikation ist nicht kommutativ

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und nicht nullteilerfrei

3) Pauli-Matrizen, Übung

1.1.4 Elementarmatrizen

Definition 11 Elementarmatrizen in $\mathrm{Mat}_{m\times m}(K)$

1) $$V_{ij} := \begin{array}{c} \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & 0 \\ & 0 & & & 1 & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 1 & & & 0 & \\ & & & & & 1 \\ & \uparrow i & & & \uparrow j & \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

2) $$M_i(\lambda) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \leftarrow i \\ \\ \end{array}$$

3) $$E_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \overset{\downarrow j}{} & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \quad (j \neq i)$$

Satz 12 Sei $E \in \mathrm{Mat}_{m\times m}$ eine Elementarmatrix und $A \in \mathrm{Mat}_{m\times l}$. Dann geht $E \cdot A$ aus den eZU gemäß E hervor

Beweis durch Nachrechnen, zB 3):

$$\left(E_{ij}(\lambda)\cdot A\right)_{st} = \sum_{l=1}^{m} \underbrace{E_{ij}(\lambda)_{sl}}_{} A_{lt} = \underbrace{E_{ss}(\lambda)}_{=1} A_{st}$$

$$+ \begin{cases} 0 & : s \neq i \\ \lambda \cdot A_{jt} & : s = i \end{cases} \qquad = \begin{cases} 1 & : s = l \\ \lambda & : s = i,\ l = j \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} A_{st} & : \quad s \neq i \\ A_{it} + \lambda A_{jt} & : \quad s = i \end{cases} \qquad \square$$