23.10.19

Freitag, 20. Oktober 2023 12:52

Inverse Matrizen

Definition 13 Sei $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Eine Matrix $B \in Mat_{n\times n}(K)$ heißt <u>invers</u> zu A, falls $BA = AB = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} =: E_n$

Dann schreiben wir $A^{-1} := B$.

Beispiele 14 1) Zur Nullmatrix ist keine Matrix invers

2)
$$A := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$
hat keine inverse Matrix, denn falls doch B so eine ist, gilt

$$(AB)_{st} = \sum_{j=1}^{n} A_{sj} B_{jt} = \begin{cases} A_{1n} B_{nt} & : s=1,\ j=n \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

insbesondere $(AB)_{22} = 0$.

3) $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad-bc \neq 0$

$B := \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Dann gilt $B = A^{-1}$.

Satz 15 Elementarmatrizen sind invertierbar, und es gilt:

1) $M_i(\lambda)^{-1} = M_i(1/\lambda)$ 2) $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$

1) $M_i(\lambda)^{-1} = M_i(1/\lambda)$ 2) $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$

3) $V_{ij}(\lambda)^{-1} = V_{ij}(\lambda)$

Beweis durch Nachrechnen, zum Beispiel an 1)

$$\left(M_i(\lambda)\cdot M_i(1/\lambda)\right)_{st} = \sum_{l=1}^{m} M_i(\lambda)_{sl}\, M_i(1/\lambda)_{lt} =$$

$$= \begin{cases} 0: & l \neq s \vee l \neq t \\ 1: & l = s \wedge l = t \wedge s \neq i \\ \lambda \cdot 1/\lambda: & l = s \wedge l = t \wedge s = i \end{cases} = E_m$$

$\square$

Satz 16 Es seien $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$ invertierbar. Dann gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

Beweis $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}E_n B = E_n$

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E_n$ $\square$

Satz 17 A^{-1} ist eindeutig bestimmt.

Beweis Sei $B \neq A^{-1}$ mit $BA = AB = E_n$. Dann

$B = (AB)A^{-1} = E_n \cdot A^{-1} = A^{-1}$ $\square$

Beweis des Satzes 5: Sei $A \in Mat_{m\times n}(K)$ und $b \in \mathbb{R}^m$

Beweis des Satzes 5: Sei $A \in Mat_{m \times n}(K)$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Es gehe $(A'|b')$ aus $(A|b)$ durch eZU hervor. Also gibt es EIM $E_1, \dots, E_k$ so dass $A' = \underbrace{E_1 \cdots E_k}_{= \prod E_i} \cdot A$ gilt. Wir zeigen $\mathbb{L}_{A,b} = \mathbb{L}_{A',b'}$

„$\subseteq$" $x \in \mathbb{L}_{A,b} \Rightarrow Ax = b \Rightarrow (\prod E_i) Ax = (\prod E_i) b$

$\Rightarrow A' x = b' \Rightarrow x \in \mathbb{L}_{A',b'}$

„$\supseteq$" $A' x = b' \Rightarrow (\prod E_i) Ax = (\prod E_i) b'$

$\Rightarrow (\prod E_i)^{-1} (\prod E_i) Ax = (\prod E_i)^{-1} (\prod E_i) b'$

$\Rightarrow Ax = b$

wobei $(\prod E_i)^{-1} = E_k^{-1} \cdot \ldots \cdot E_1^{-1}$ $\square$

Zeilenstufenform

Definition 18 Eine Matrix heißt in ZSTF, falls sie die folgende Gestalt hat

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

Die ZSF heißt speziell wenn die Matrix diese Gestalt hat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{1\,r+1} & c_{1\,r+2} & \cdots & c_{1\,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_{2\,r+1} & c_{2\,r+2} & \cdots & c_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & c_{r-1\,r+1} & c_{r-1\,r+2} & \cdots & c_{r-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{r\,r+1} & c_{r\,r+2} & \cdots & c_{r\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$