23.10.24

Dienstag, 24. Oktober 2023 15:01

Bemerkung 19

Eine sZSTF ergibt sich aus Spaltenvertauschungen aus einer ZSTF und umgekehrt

2) $A \cdot V_{ij}$ = vertauschen der Spalten i und j von A

3) allgemein: Multiplikation von rechts mit elMat, ergibt elementare Spaltenumformungen

$\ulcorner$ $$A \cdot E = (AE)^{TT} = (E^T A^T)^T$$

↑ eZU an A^T $\lrcorner$

Beispiel 20

1) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ in ZSTF

2) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

Satz 21

$A', A \in Mat_{m \times n}(K)$, $b' \in \mathbb{R}^m$

A' gehe aus A durch einen Spaltentausch hervor, also $A' = A \cdot V_{ij}$ $n \times n$. Dann

$$\underset{\in \mathbb{R}^n}{x} \in \mathbb{L}_{(A'|b')} \Leftrightarrow V_{ij}x \in \mathbb{L}_{(A|b')}$$

Beweis "$\Rightarrow$" $A'x = b' \Rightarrow A V_{ij} x = b'$

$\Rightarrow V_{ij} x \in \mathbb{L}_{(A|b')}$

"$\Leftarrow$" $A \cdot V_{ij} x = b' \Rightarrow A'x = b'$ $\square$

Beispiel 22 Variablentausch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = A V_{12} V_{24} = V_{24} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'x = b \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -2x_3 - x_5 \\ x_2 &= -3x_5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_{(A'|b)} = \{(-2x_3 - x_5, -3x_5, x_3, x_4, x_5)^T \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_{(A|b)} = V_{12} V_{24} \mathbb{L}_{(A'|b)} = \{(x_4, -2x_3 - x_5, x_3, -3x_5, x_5)^T \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

Satz 23 Es sei A in sZSF wie in Definition. Dann ist $\mathbb{L}_{(A|0)} =$

$$\mathbb{L}_{A,0} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} c_{1\,r+1} \\ c_{2\,r+1} \\ \vdots \\ c_{r-1\,r+1} \\ c_{r\,r+1} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c_{1\,r+2} \\ c_{2\,r+2} \\ \vdots \\ c_{r-1\,r+2} \\ c_{r\,r+2} \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{n-r} \begin{pmatrix} c_{1\,n} \\ c_{2\,n} \\ \vdots \\ c_{r-1\,n} \\ c_{r\,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ \lambda_1, \dots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $\mathbb{L}_{(A|0)} =$

$$\mathbb{L}_{A,0} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} c_{1\,r+1} \\ c_{2\,r+1} \\ \vdots \\ c_{r-1\,r+1} \\ c_{r\,r+1} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c_{1\,r+2} \\ c_{2\,r+2} \\ \vdots \\ c_{r-1\,r+2} \\ c_{r\,r+2} \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{n-r} \begin{pmatrix} c_{1\,n} \\ c_{2\,n} \\ \vdots \\ c_{r-1\,n} \\ c_{r\,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} ,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R} \right\}$$

Beweis Jedes $x \in \mathbb{L}_{(A|0)}$ dieser Gestalt gilt $Ax = 0$ durch nachrechnen. Sei nun $Ax = 0$, also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{1\,r+1} & c_{1\,r+2} & \cdots & c_{1\,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_{2\,r+1} & c_{2\,r+2} & \cdots & c_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & c_{r-1\,r+1} & c_{r-1\,r+2} & \cdots & c_{r-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{r\,r+1} & c_{r\,r+2} & \cdots & c_{r\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -\sum_{i=r+1}^{n} x_i \cdot c_{1i} \\ &\vdots \\ x_r &= -\sum_{i=r+1}^{n} x_i\, c_{ri} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_r \\ x_{r+1} \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \begin{pmatrix} -c_{1\,r+1} \\ | \\ -c_{r\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} -c_{1n} \\ | \\ -c_{rn} \\ 0 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit $\lambda_1 := -x_{r+1}, \ldots, \lambda_{n-r} := -x_n$ folgt Beh. $\square$