# 23.10.26

Freitag, 27. Oktober 2023 09:46

**Bemerkung 24** Insgesamt haben wir also: $A \in Mat_{mn}$

$A'$ sei ZSF von $A$ und $A''$ s ZSF von $A'$:

$$\mathbb{L}_{(A|b)} = \mathbb{L}_{(A'|b')} = \Big(\prod^{m\times n} V_{ij}\Big)\, \mathbb{L}_{(A''|b')}$$

**Satz 25** Jedes $A \in Mat_{m\times n}(K)$ lässt sich durch eZU in ZSF bringen.

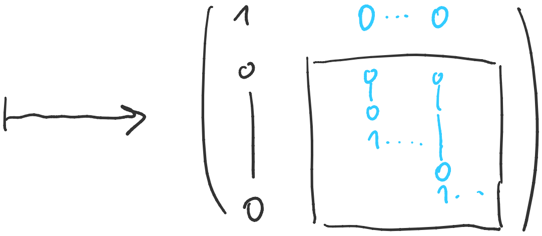
**Beweis** (Skizze) durch Induktion über die Anzahl $(n)$ der Spalten.

<u>$n=1$</u> $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$. Ist $A=0$, dann fertig.

Sonst gibt es $a_{i1} \neq 0$, das mit $V_{i1}$ an oberste Position gebracht wird. Dann $M_1(1/a_{i1})$ und $E_{j1}(-a_{j1})$ für $j = 1, \dots, m$. Ergebnis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ZSF

<u>$n \mapsto n+1$</u> $A$ habe $n+1$ Spalten. Wie bei Anfang bringe die erste Spalte auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Im letzteren Fall ist man mit IV sofort fertig. Sonst

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\quad c \quad} \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} \xmapsto{IV} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\quad c' \quad} \\ 0 & \begin{matrix} 0 & & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & & 0 & \\ 1 & \cdots & \vdots & \\ & & 0 & \\ & & 1 & \cdots \end{matrix} \end{pmatrix}$$



ZSTF $\square$

**Beispiel 26**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right) \xmapsto{E_{31}(-4)\,E_{21}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{E_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{M_2(-\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{E_{12}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =: b'$$

$n = 3, \; r = 2$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_{(A|0)} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösung des inhomogenen Systems „zu Fuß":

$$x_1 = 2 - x_3$$
$$x_2 = 2 + 2x_3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda \\ +2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_{A|b} = b' + \mathbb{L}_{(A|0)}, \quad b' = (\Pi E) \cdot b$$

**Satz 27** Gegeben sei LGS $Ax = b$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax_0 = b$. Dann $\mathbb{L}_{(A|b)} = x_0 + \mathbb{L}_{A|0}$

**Beweis** „$\subseteq$" $Ax = b$, $A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = 0$

$\Rightarrow x - x_0 \in \mathbb{L}_{(A|0)} \Rightarrow x \in x_0 + \mathbb{L}_{(A|0)}$

„$\supseteq$" $x = x_0 + x' \Rightarrow Ax = Ax_0 + Ax' = b + 0$ $\square$

**Satz 28** $\overset{m\times n}{(A|b)}$ erweiterte Koeffmatrix, $A \in Mat_{m,n}$

$(A'|b')$ ZSF, $(A''|b')$ sZSF

$$A'' = \begin{array}{c c} & n \\ r & \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & C \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} m \qquad \left[\begin{array}{c} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ \hline b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_m \end{array}\right] = b' \in Mat_{m,1}$$

1) $A''x = b'$ lösbar $\Longleftrightarrow$ $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$

2) falls lösbar: $A''\tilde{b} = b'$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in Mat_{n,1}$

3) $\mathbb{L}_{(A''|b')} = \tilde{b} + \mathbb{L}_{(A''|0)}$

4) $A'' = A' \cdot \overset{n\times n}{S}$ ($S$ = Spaltenumformungen)

$\Rightarrow \mathbb{L}_{(A|b)} = \mathbb{L}_{(A'|b')} = S\,\mathbb{L}_{(A''|b')} = S\tilde{b} + S\,\mathbb{L}_{(A''|0)}$

**Beweis** klar! Durch obige Sätze.

**Beispiel 29** vom oben

(4)

Beispiel a) von oben

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A'' = A' \underbrace{V_{12} V_{24}}_{= S} = V_{24} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{L}_{A'b} = S \tilde{b} + \underbrace{S \, \mathbb{L}_{A''0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

von oben

$$\underbrace{V_{12} V_{24} \mathbb{L}}_{A''0} = \left\{ \left( x_4 \,,\, -2x_3 - x_5 \,,\, x_3 \,,\, -3x_5 \,,\, x_5 \right)^T \,\middle|\, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$



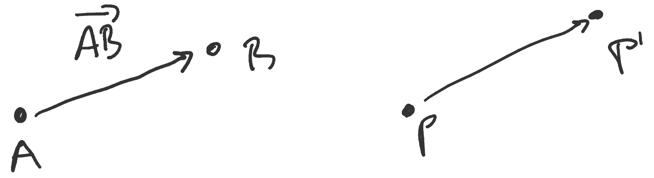
# 1.2. Vektoren

## Verschiebungen

Aus EG kennen wir: sei $E$ eine Ebene und $A, B \in E$ Punkte. Eine Verschiebung $\tau_{\overrightarrow{AB}} : E \to E$ bildet jeden Punkt $P$ von $E$ auf $P'$ ab, so dass $\overrightarrow{PP'}$ und $\overrightarrow{AB}$ parallelgleich sind.

$\overrightarrow{PP'}$ und $\overrightarrow{AB}$ heißen parallelgleich, falls $|PP'| = |AB|$

PP' und AB heißen <u>parallel</u>gleich, falls $|PP'| = |AB|$ und $\overrightarrow{PP'}$, $\overrightarrow{AB}$ sind parallel und gleichgerichtet




$\tau_{\overrightarrow{AB}}(P) = P'$

Da $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{PP'}$ parallelgleich sind, gilt

$$\tau_{\overrightarrow{AB}} = \tau_{\overrightarrow{PP'}}.$$