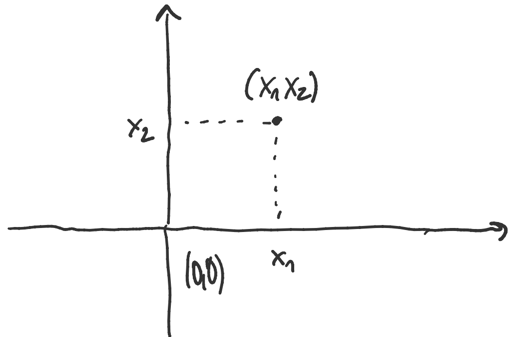
23.10.31

Dienstag, 31. Oktober 2023 14:25

Koordinaten

Wir kennen $\mathbb{R}^2$ als Punktmenge $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ und also Koordinatensystem:



Zwei Punkte in $\mathbb{R}^2$ definieren eine Verschiebung

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \{\tau \mid \tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ Verschiebung}\}$$

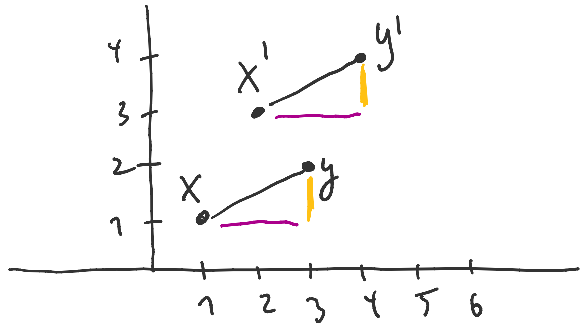
$$X := (x_1, x_2) \quad (y_1, y_2) =: y \longmapsto \tau_{\vec{xy}}$$

Allerdings ist φ nicht injektiv, denn verschiedene Paare von Punkten können dieselbe Verschiebung definieren. Daher führen wir eine Relation $\sim$ auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ein:

$$(X, y) \sim (X', y') \;:\Longleftrightarrow\; y_1 - x_1 = y_1' - x_1' \;\; \underline{\text{und}}$$

$$X = (x_1, x_2) \quad X' = (x_1', x_2') \qquad y_2 - x_2 = y_2' - x_2'$$
$$y = (y_1, y_2) \quad y' = (y_1', y_2')$$

Zum Beispiel



Satz 3.0 $\sim$ ist eine ÄR

Satz 30 $\sim$ ist eine ÄR

Beweis Ist klar wegen der Gleichungen in Dfn. Nachrechnen!

Also erhalten wir

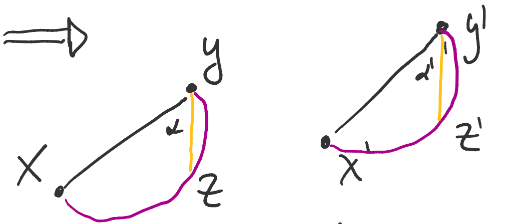
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "pr"] & \{\tau \mid \dots\} \\
\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 / \sim \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\Phi([(x,y)]) := \tau_{\overrightarrow{xy}}$$

Satz 31 Φ ist bijektiv

Beweis <u>injektiv</u> $\Phi([(x,y)]) = \tau_{\overrightarrow{xy}} = \tau_{\overrightarrow{x'y'}} = \Phi([x',y'])$

$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{xy}$ und $\overrightarrow{x'y'}$ sind parallelgleich als gerichtete Strecken im $\mathbb{R}^2$ $\Longrightarrow$



Ziehe Thaleskreis für beide, dann jeweils Parallele zur y-Achse des Koordinatensystems, erhalte rechtwinklige Dreiecke Δxyz, $\Delta x'y'z'$. Wegen $\alpha = \alpha'$ nach Stufenwinkelsatz sind Dreiecke nach WWW ähnlich also wegen $|xy| = |x'y'|$ ~~ka~~ nach WSW kongruent daher $|yz| = |y'z'|$ und $|xz| = |x'z'|$

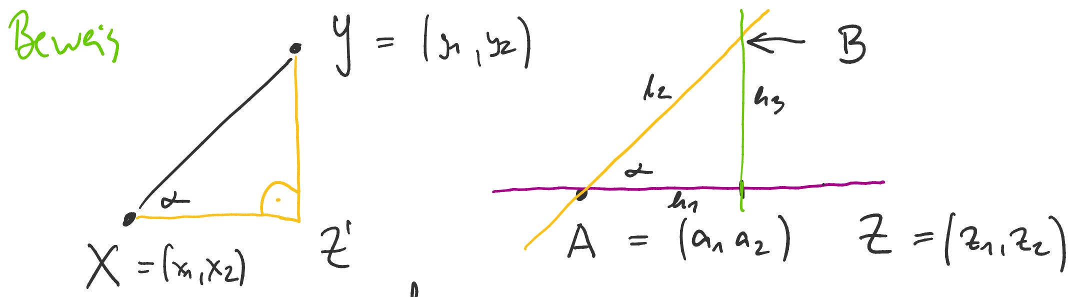
dann $|yz| = |y'z'|$ und $|xz| = |x'z'|$

$\Longrightarrow \quad (x,y) \sim (x',y') \quad \Longrightarrow \quad [(x,y)] = [(x',y')]$

<u>surjektiv</u> sei $\tau_{\overrightarrow{xy}}$ vorgelegt, dann $\Phi[(x,y)] = \tau_{\overrightarrow{xy}}$ □

Satz 32 $X, y, A \in \mathbb{R}^2$: $\tau_{\overrightarrow{xy}}(A) = A + y - X$

Beweis



Ziehe Parallele h_1 zur x-Achse des Koordinatensystems durch A. Trage $z = (z_1, z_2) = (a_1 + (y_1 - x_1), a_2)$ ab. Parallele durch A an Xy. Senkrechte h_3 an h_1, $B = h_2 \cap h_3$. Dann $\Delta Xz'y$ und Azy kongruent, also $\tau_{\overrightarrow{xy}}(A) = B = (a_1 + y_1 - x_1, a_2 + y_2 - x_2)$

$= A + y - X$ □

Betrachte nun

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 /_\sim \xrightarrow{\Psi} (\mathbb{R}^2)^* := \left\{ \vec{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, v_1, v_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$[(X,y)] \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix}$$

Satz 33 Ψ ist bijektiv

Satz 33 Ψ ist bijektiv

Beweis <u>injektiv</u> $\Psi([(X,Y)]) = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' - x_1' \\ y_2' - x_2' \end{pmatrix} = \Psi([(X',Y')])$

$\Rightarrow y_1 - x_1 = y_1' - x_1', \quad y_2 - x_2 = y_2' - x_2' \Rightarrow [(X,Y)] = [(X',Y')]$

<u>surjektiv</u> $\vec{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2)^*$ vorgelegt

$\Rightarrow \Psi([(0, (v_1, v_2))]) = \begin{pmatrix} v_1 - 0 \\ v_2 - 0 \end{pmatrix} = \vec{v}$ $\square$

Rechnen mit Vektoren

Die Elemente von $(\mathbb{R}^2)^*$ nennen wir Vektoren.

<u>Addition</u>

$$(\mathbb{R}^2)^* \xleftarrow[1:1]{\Psi} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 /\sim \xrightarrow[1:1]{\Phi} \{\tau \mid \cdots\}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ $\qquad [(X,Y)] + [(X',Y')]$ $\qquad \tau_{\vec{AB}} + \tau_{\vec{CD}}$

$\vec{v} + \vec{w} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$ $\qquad := [(X+X', Y+Y')]$ $\qquad := \tau_{\vec{CD}} \circ \tau_{\vec{AB}}$

Wir zeigen, dass die Additionen miteinander verträglich sind. <u>Zunächst Ψ</u>: $\Psi([X,Y]) = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix}$

$\Psi([X',Y']) = \begin{pmatrix} y_1' - x_1' \\ y_2' - x_2' \end{pmatrix}, \quad \Psi([(X+X', Y+Y')]) \overset{\text{Def}}{=} \begin{pmatrix} y_1 + y_1' - x_1 - x_1' \\ y_2 + y_2' - x_2 - x_2' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1' - x_1' \\ y_2' - x_2' \end{pmatrix} = \ldots$ ✓