23.11.02

Donnerstag, 2. November 2023 17:37

Lemma 34 $[(X,Y)] = [(0, \overbrace{Y-X}^{\text{'+' in } \mathbb{R}^2})]$

Beweis $X = (x_1\ x_2)$, $Y = (y_1\ y_2)$. Also

$$(Y-X)_1 - 0_1 = y_1 - x_1 - 0 = y_1 - x_1 = Y_1 - X_1$$

$$(Y-X)_2 - 0_2 = y_2 - x_2 - 0 = Y_2 - X_2 \qquad \square$$

Nun ϕ

$$\phi([A,B]) + \phi([C,D]) =$$

$$\tau_{\overrightarrow{AB}} + \tau_{\overrightarrow{CD}} \overset{\text{Dfn}}{=} \tau_{CD} \circ \tau_{AB} \overset{\text{parallel}}{=} \tau_{B\,\tau_{CD}(B)} \circ \tau_{AB} \overset{\text{Kompo}}{=} \tau_{A\,\tau_{CD}(B)}$$

$$= \tau_{A,\, B+D-C} = \tau_{0\, \tau_{A,B+D-C}(0)}$$

$$= \tau_{0,\, B+D-C-A}$$

$$\phi([A,B] + [C,D]) = \phi([A+C,\, B+D]) = \phi($$

$$= \phi([0,\, B+D-A-C]) = \tau_{0,\, B+D-A-C} \qquad \square$$

Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \vec{v} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda[(X,Y)] := [(\lambda X, \lambda Y)]$$

$$\lambda \tau_{\overrightarrow{AB}} = \tau_{\lambda \cdot \overrightarrow{AB}}$$

sind auch unter ϕ und ψ verträglich!

Zusammenhang der Transposition

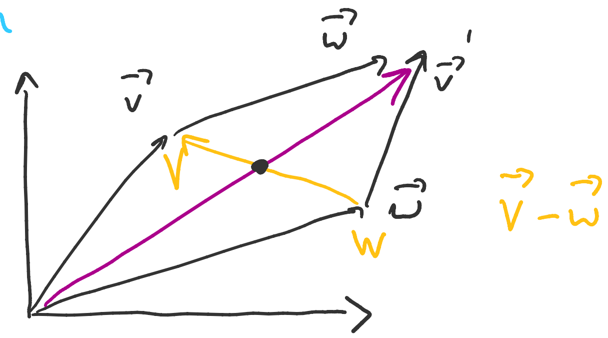
Zusammenhang der Transposition

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(\ )^T} (\mathbb{R}^2)^* \xleftarrow{\ \psi\ } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow \{[\ ] \mid \dots\}$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2)^T := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Anwendung Elementare Geometrie

Parallelogramm



$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix} \overset{\psi}{\longleftrightarrow} [(\underbrace{(w_1, w_2)}_{W}, \underbrace{(v_1, v_2)}_{V})]$$

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow [((0,0), (v_1+w_1, v_2+w_2))]$$

$$\vec{w} + \tfrac{1}{2}(\vec{v} - \vec{w}) = \tfrac{1}{2}\vec{w} + \tfrac{1}{2}\vec{v} = \tfrac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w})$$

1.3. Vektorräume

Einführung Wir betrachten $(\mathbb{R}^2)^* = \mathrm{Mat}_{2,1}$. Es seien $\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \vec{z} := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \in (\mathbb{R}^2)^*$. Wir beobachten Rechenregeln:

(GA) $\quad \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$

(GA) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$

(GK) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

Es gibt $\vec{o} \in (\mathbb{R}^2)^*$ so dass für alle $\vec{x} \in (\mathbb{R}^2)^*$ gilt:

(GN) $\vec{x} + \vec{o} = \vec{x}$, wähle nämlich $\vec{o} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(GI) Zu $\vec{x}$ gibt es $-\vec{x} \in (\mathbb{R}^2)^*$, so dass $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{o}$ gilt, nämlich

$$-\vec{x} := \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Definition 35 Eine Menge G heißt (abelsche) Gruppe, falls es eine Abbildung $+ : G \times G \to G$ gibt, so dass mit der Abkürzung $g_1 + g_2 := +(g_1, g_2)$ die Rechenregeln (GA), ((GK)) (GI) und (GN) gelten. Schreibe dann $(G, +)$.

Beispiel 36 $\boxed{1}$ $((\mathbb{R}^2)^*, +)$ von oben ist abelsche Gruppe $\boxed{2}$ $(\mathbb{R}^n, +)$ aus erster Vorlesung $\boxed{3}$ $Mat_{m,n}$ (Übung)

Vorlesung [3] $\mathrm{Mat}_{m,n}$ (Übung)

[4] $\mathcal{P}_n := \{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R} \}$

= Polynome vom Grad n (Übung)

Wir betrachten wieder $(\mathbb{R}^2)^*$ und beobachten folgende Rechenregeln für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(D) $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$

$(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$

(A) $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$

(N) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Definition 37 Eine abelsche Gruppe G heißt <u>Vektorraum</u>, falls es eine Abbildung

$\bullet : \mathbb{R} \times G \to G$ gibt, so dass mit der Abkürzung $\lambda \cdot \vec{x} := \bullet(\lambda, \vec{x})$ die Rechenregeln (D), (A) und (N) gelten. Wir schreiben dann auch $(G, +, \bullet)$. Die Abbildung $\bullet$ heißt <u>Skalarmultiplikation</u>

fehlt Skalarmultiplikation

Beispiel 38 $\boxed{1}$ $((\mathbb{R}^2)^*, +, \cdot)$ wie voriges Kapitel

$\boxed{2}$ $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ aus erster Vorlesung

$\boxed{3}$ $(\mathcal{P}_n, +, \cdot)$ ← wie ist "$\cdot$" definiert (Übung)

Beispiel 39 $\boxed{1}$ Die Pauli-Matrizen bilden keine Gruppe (warum nicht?)

$\boxed{2}$ $(\mathrm{Mat}_{2,2}, \cdot)$ mit Matrizenmultiplikation: erfüllt (GA), (GN) mit $\vec{0} := E_2$, aber nicht (GI) und (GK)

$\boxed{3}$ $GL_{2,2} := \{ A \in \mathrm{Mat}_{2,2} \mid A \text{ invertierbar} \}$ ist mit Matrizenmultiplikation eine Gruppe (Übung)