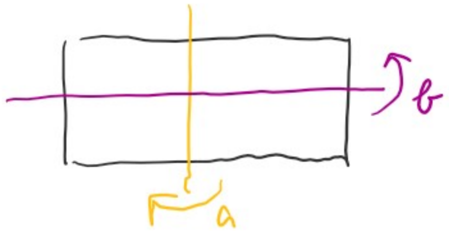
23.11.07

Dienstag, 7. November 2023 14:47

$\boxed{4}$ Klein'sche Vierergruppe



	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Untervektorräume

Korollar 40 In einem Vektorraum V gelten folgende Rechenregeln. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in V$.

$\boxed{1}$ $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$\boxed{2}$ $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 \in \mathbb{R} \vee \vec{x} = \vec{0}$

$\boxed{3}$ $(-\lambda) \cdot \vec{x} = -\lambda \vec{x}$

Beweis zu $\boxed{2}$ „$\Rightarrow$" Falls $\lambda = 0$ fertig. Sei also $\lambda \neq 0$: $\vec{x} \overset{N}{=} 1 \cdot \vec{x} = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot \vec{x} \overset{(A)}{=} \lambda^{-1} \cdot (\lambda \vec{x})$

$= \lambda^{-1} \cdot \vec{0} \overset{\boxed{1}}{=} \vec{0}$

zu $\boxed{1}$ $0 \cdot \vec{x} = (0+0) \cdot \vec{x} \overset{D}{=} 0\vec{x} + 0 \cdot \vec{x} \Rightarrow$

$0\vec{x} = \vec{0}$, $\lambda \cdot \vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{D}{=} \lambda \cdot \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0} \Rightarrow$

$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

zu $\boxed{4}$ $\lambda \vec{x} + ((-\lambda) \cdot \vec{x}) = (\lambda + (-\lambda)) \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} \overset{\boxed{1}}{=} \vec{0}$

$\Rightarrow (-\lambda) \vec{x} = -\lambda \vec{x}$

Dfn 41 Untervektorraum: Sei V ein K-Vec und

Dfn 41 Untervektorraum: Sei V ein K-Vec und $U \subset V$ heißt <u>UVR</u> von V, falls U auch K-Vec ist.

Satz 42 $U \subset V$ ist UVR $\Leftrightarrow$ 1) $U \neq \emptyset$ oder

2) $\forall\, x, y \in U, \lambda \in K: \; x+y \in U, \; \lambda x \in U$

Beweis „$\Rightarrow$" Es reicht 2) zu zeigen. Da $U \subset V$ UVR ist, sind $+$ und $\cdot$ auf U wohldfn, also folgt 2)

„$\Leftarrow$" $(U, +)$ abelsche Gruppe: (+ ist nach 2) wohldef) Kommu und Asso klar, weil das in V gilt. <u>Neutral</u>: zu zeigen $0_V \in U$.

Sei $\lambda = 0_K$ und $\vec{u} \in U \neq \emptyset \Rightarrow 0_V \overset{\text{üb}}{=} \lambda \cdot \vec{u} \overset{\text{Vor}}{\in} U$.

<u>Invers</u> $\vec{u} \in U \subset V$. Zu zeigen $-\vec{u} \in U$: $-\vec{u} \overset{\text{ü}}{=} (-1)_K \cdot \vec{u} \overset{\text{Vor}}{\in} U$

„$\cdot$" ist nach 2) wohldfn also folgen N, A, K ~~aus~~ für U, weil es in V gilt $\square$

Beispiel 43 $\boxed{1}$ $0 \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $U := \{\lambda \vec{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist UVR denn: 1. $\lambda \vec{x} + \mu \vec{x} = (\lambda + \mu)\vec{x} \in U$

2. $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \vec{x} \in U \Rightarrow \lambda(\mu \vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x} \in U$

$\boxed{2}$ $\mathbb{L}_{(A|0)} \subset \mathrm{Mat}_{m,1}$ UVR: 1. $x, y \in \mathbb{L}_{(A|0)} \Rightarrow A(x+y) = Ax + Ay = \vec{0}$ 2. $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{L}_{(A|0)} \Rightarrow A(\lambda x) = \lambda(Ax) = 0$ $\square$

Linearkombination und Erzeugnis

Dfn 44 V sei $\mathbb{R}$-Vec, $M \subset V$, $M \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$

Dfn 44 V sei $\mathbb{K}$-Vec, $M \subset V$, $M \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$

$\boxed{1}$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, $v_i \in M$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ <u>Liko</u> mit <u>Elt</u> aus M

$\boxed{2}$ $\langle M \rangle := \{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \mid m \in \mathbb{N}, v_i \in M, \lambda_i \in \mathbb{K}, m \in \mathbb{N} \}$

<u>Erzeugnis</u> von M "$\hat{=}$" alle endlichen Likos aus M

Bsp 45
$$\left.\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2 \end{aligned}\right\}$$

denn "$\subset$" ✓ "$\supset$" $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + (y-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$