23.11.09

Mittwoch, 8. November 2023 13:51

Satz 46 $\langle M \rangle \subset V$ ist UVR

Beweis $\boxed{1}$ $M = \emptyset \Rightarrow \langle M \rangle = \emptyset \subset V$ UVR

$\boxed{2}$ $\boxed{a}$ $x, y \in \langle M \rangle \Rightarrow x = \sum \lambda_i v_i \,,\; y = \sum \mu_i w_i$

$$\Rightarrow x + y = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n$$

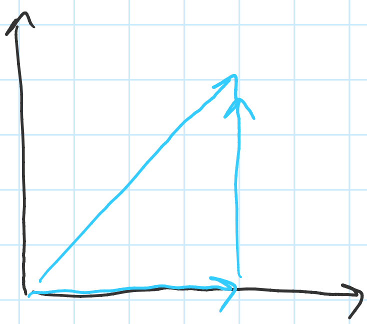
$$= \sum_{i=1}^{m+n} \underbrace{\sigma_i}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{h_i}_{\in M} \in \langle M \rangle$$

$\boxed{b}$ $\lambda \in K, x = \sum \lambda_i v_i \in \langle M \rangle \Rightarrow \lambda x = \sum \lambda \lambda_i v_i \in \langle M \rangle$ $\square$

Beispiel 47 Lösungen von LGS $(A \mid 0)$ lassen sich nach Satz X als Erzeugnis von Vektoren schreiben.

Beispiel 48 $\boxed{1}$ Betrachte $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und versuche aus diesen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu erhalten: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \lambda \,,\; \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0 = \mu$. Also nur trivial möglich

$\boxed{2}$



Betrachte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$. Aus diesen kann $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear kombiniert werden: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dfn 49 (Linear (un)abhängig): $V \in K\text{-Vec}$, $M \subset V$

$\boxed{1}$ M <u>l.u</u> $\iff \left(\forall k \in \mathbb{N}, v_i \in M, \lambda_i \in K : \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \right.$

$\left. \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \right)$

$\boxed{2}$ M <u>l.a</u> $:\iff$ M nicht l.u.

Bem 50 M l.a $\iff \exists k \in \mathbb{N}, v_1 - v_k \in M, \lambda_1 - \lambda_k \in K$:

$$\sum \lambda_i v_i = 0 \wedge \neg(\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0)$$

$\iff \exists$ eine nichttriviale Liko der Null

Bsp 51 $\boxed{1}$ $\emptyset = M$ ist l.u.

$\boxed{2}$ $\vec{0} \in M \implies M$ l.a Denn: $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ist nicht triviale Liko der $\vec{0} \in V$.

$\boxed{3}$ In 50 $\boxed{1}$ = l.u. In 50 $\boxed{2}$ = l.a.

$\boxed{4}$ Seien $v_1, -, v_n \in \mathbb{R}^m$ und $A \in Mat_{m,n}$ mit v_i als Spalten, also $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

<u>formaler</u>: $A = \begin{pmatrix} (v_1)_1 & \cdots & (v_n)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (v_1)_m & & (v_n)_m \end{pmatrix}$

<u>Dann gilt:</u> $v_1, - v_m$, l.u. $\iff \mathbb{L}_{(A|0)} = \{0\}$

$\uparrow$

__Damit gilt:__ $v_1, \ldots, v_m$, l.u. $\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \mathbb{L}(A|0)$ [illegible]

(Übung)

$\boxed{5}$ Gilt $n > m$ in $\boxed{4}$, dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhäng. (Übung)

$\boxed{6}$ Aus $\boxed{5}$ folgt dass z.B. 4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ immer l.a sind.

$\boxed{7}$ $1, x, x^2, \ldots, x^n \in \mathcal{P}_n$ sind l.u, denn

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0 \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

(denn x ist Variable). Außerdem gilt offenbar $\langle\{1, x, \ldots, x^n\}\rangle = \mathcal{P}_n$.

Def n 52 $M \subset V$ __Basis__ von V $:\Longleftrightarrow$ M l.u. $\wedge$ $\langle M \rangle = V$

Beispiel 53 $\boxed{1}$ $e_i = (0 - 1 - 0) \in \mathbb{R}^n$, $\{e_1 - e_n\}$ Basis von $\mathbb{R}^n$ (Standardbasis)

$\boxed{2}$ $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ Basis von $\mathcal{P}_n$

$\boxed{3}$ $$E_{ij} := \begin{array}{c c} & \downarrow j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \vdots \\ \cdots & 1 \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$ $i \in \{1 - m\}, j \in \{1 - n\}$ Basis von $\mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$

$\boxed{4}$ Vektoren aus $\mathbb{L}_{(A|0)}$ im Satz X bilden eine Basis von $\mathbb{L}_{(A|0)}$

Basisauswahlsatz

Satz 54 $\emptyset \neq M$ l.a. $\Leftrightarrow$ $\exists\, v \in M : v \in \langle M \setminus \{v\} \rangle$

Beweis „$\Rightarrow$" $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{v_i}_{\in M}$ mit oBdA $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 =$

$= -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow v_1 = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i \in \langle \underbrace{M \setminus \{v_1\}}_{M \neq \{0\}} \rangle$

(falls $n=1$ folgt aus $\lambda_1 \neq 0$ dass $v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \vec{0} = 0 \cdot v$)

„$\Leftarrow$" Falls $v = 0$, dann M l.a. Sei $v \neq 0$: $v \in \langle M \setminus \{v\} \rangle \Rightarrow \exists\, v_1, \ldots, v_n$

$\in M \setminus \{v\}$: $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i - 1 \cdot v \Rightarrow M$ l.a. $\square$

Satz 55 $M \subset V$. $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$, Äquivalent sind

$\boxed{1}$ M Basis

$\boxed{2}$ M EZS <u>und</u> $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$: $M \setminus \{v_i\}$ kein EZS

$\boxed{3}$ M l.u. <u>und</u> $\forall v \notin M$: $M \cup \{v\}$ nicht l.u.

$\boxed{4}$ $\forall v \in V$: v eindeutig als Liko aus M darstellbar

Beweis $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ Ann.: $M \setminus v_i$ ist EZS

$\langle M \setminus v_i \rangle = V \underset{v_i \in V}{\Rightarrow} v_i \in \langle M \setminus \{v_i\} \rangle \overset{S55}{\Rightarrow} M$ l.a. ↯

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{4}$ Annahme es gibt 2 Darstellungen für ein

$v \in V$: $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ mit oBdA $\lambda_1 \neq \mu_1$

$v \in V$: $v = \sum_{i=1} \lambda_i v_i = \sum_{i=1} \mu_i v_i$ mit OBdA $\lambda_1 \neq \mu_1$

$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \mu_1} \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i \Rightarrow v_1 \in \langle M \setminus \{v_1\} \rangle$

$\Rightarrow \langle M \setminus \{v_1\} \rangle = \langle M \rangle = V$ ↯ zu $\boxed{2}$

$\boxed{4} \Rightarrow \boxed{3}$ a) Zeige erst dass M l.u. ist: angenommen nicht: $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot v_i$ sind zwei Darst der 0 im ↯ zu $\boxed{4}$.

b) Zeige: $M \cup \{v\}$ l.a.: $v \overset{\boxed{4}}{\in} \langle M \rangle = \langle (M \cup v) \setminus v \rangle \overset{S55}{\Rightarrow} M \cup \{v\}$ l.a.

$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ Zu zeigen ist $\langle M \rangle = V$. „$\subseteq$" ✓ „$\supseteq$" Sei $v \in V \setminus M$.

$v \notin M \overset{\boxed{3}}{\Rightarrow} M \cup \{v\}$ l.a. $\Rightarrow \exists \lambda_i, \lambda$ nicht alle $= 0$: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \lambda v = 0$

$\overset{M \text{ l.u.}}{\Longrightarrow} \lambda \neq 0 \Rightarrow v = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} v_i \Rightarrow v \in \langle M \rangle$ ↯

Satz (Basisauswahl) Jedes endliche EZS von VR enthält eine Basis.

Beweis solange Elte wegnehmen bis unverkürzbar gemäß Satz 55. $\boxed{2}$.