23.11.14

Dienstag, 14. November 2023 15:03

Satz 55 $M \subset V$. $M = \{v_1, \dots, v_n\}$, Äquivalent sind

[1] M Basis

[2] M EZS und $\forall i \in \{1,\dots,n\}$: $M \setminus \{v_i\}$ kein EZS

[3] M l.u. und $\forall v \notin M$: $M \cup \{v\}$ nicht l.u.

[4] $\forall v \in V$: v eindeutig als Liko aus M darstellbar

Beweis [1] $\Rightarrow$ [2]

Angenommen: $M \setminus \{\vec{v}_i\}$ ist EZS : $\langle M \setminus \{\vec{v}_i\}\rangle = V \underset{\vec{v}_i \in V}{\Rightarrow} \vec{v}_i \in \langle M \setminus \{\vec{v}_i\}\rangle \overset{S54}{\Rightarrow} M$ l.a. $\lightning$

[2] $\Rightarrow$ [4] Annahme: es gibt 2 Darstellungen für ein $\vec{v} \in V$: $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{v}_i$ mit oBdA $\lambda_1 \neq \mu_1$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \mu_1} \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \mu_i)\vec{v}_i \Rightarrow \vec{v}_1 \in \langle M \setminus \{\vec{v}_1\}\rangle$$

$$\Rightarrow \langle M \setminus \{\vec{v}_1\}\rangle = \langle M \rangle = V$$ $\lightning$ zu [2]

[4] $\Rightarrow$ [3] a) Zeige erst, dass M l.u. ist. Angenommen nicht: $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \vec{v}_i$ sind zwei Darst. der $\vec{0}$ im $\lightning$ zu [4].

b) Zu zeigen $M \cup \{\vec{v}\}$ l.a.: $\vec{v} \overset{[4]}{\in} \langle M \rangle = \langle (M \cup \{\vec{v}\}) \setminus \{\vec{v}\}\rangle \overset{S54}{\Rightarrow} M \cup \{v\}$ l.a.

[3] $\Rightarrow$ [1] Zu zeigen ist $\langle M \rangle = V$. „$\subset$" ✓ „$\supset$" Sei $\vec{v} \in V \setminus \langle M \rangle$

$$\Rightarrow \vec{v} \notin M \overset{[3]}{\Rightarrow} M \cup \{\vec{v}\} \text{ l.a.} \Rightarrow \exists \lambda_i, \lambda \text{ nicht alle Null}: \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i + \lambda \vec{v} = \vec{0}$$

$$\overset{M \text{ l.u.}}{\Longrightarrow} \lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{v} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \vec{v}_i \Rightarrow \vec{v} \in \langle M \rangle$$ $\lightning$ zu $\vec{v} \notin \langle M \rangle$ $\square$

Satz 56 (Basisauswahlsatz) Jedes endliche EZS von VR enthält

Satz 56 (Basisauswahlsatz) Jedes endliche EZS von VR enthält eine Basis.

Beweis solange Elte wegnehmen bis unverkürzbar gemäß Satz 55. $\boxed{2}$.

Nachtrag Beispiel 53

$\boxed{5}$ $\mathcal{P} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_n = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i \mid n\in\mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, 1\leq i\leq n\}$

$(\mathcal{P},+,\cdot)$ ist mit der gleichen Addition und Skalarmultiplikation wie $\mathbb{P}_n$, $n\in\mathbb{N}$, ein Vektorraum.

Allerdings gibt es kein endliches $M \subset \mathcal{P}$ mit $\langle M\rangle = \mathcal{P}$. Man kann $M := \langle x^i \mid i\in\mathbb{N}\cup\{0\}\rangle$ wählen. Dann ist M auch l.u. also Basis von $\mathcal{P}$.

Nachtrag Def 44

$\boxed{3}$ $\langle M\rangle$ heißt <u>endlich erzeugt</u>, falls M endlich ist.

$\boxed{2}$ Man nennt M Erzeugendensystem (EZS).

Basisaustauschsatz

Lemma 57 (Austauschlemma)

Sei V ein Vektorraum und $M := \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$ sowie $\vec{w} := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \in V$ mit $\lambda_k \neq 0$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$.

$\boxed{1}$ $\langle M \rangle = V \Rightarrow \langle (M \setminus \{\vec{v}_k\}) \cup \{\vec{w}\} \rangle = V$

$\boxed{2}$ M l.u. $\Rightarrow (M \setminus \{\vec{v}_k\}) \cup \{\vec{w}\}$ l.u.

Man kann $\vec{v}_k$ durch $\vec{w}$ austauschen, sofern $\vec{v}_k$ an der Liko von $\vec{w}$ beteiligt ist.

Beweis Es sei oBdA $k = 1$, also $\lambda_1 \neq 0$. Zu $\boxed{1}$:

Zu zeigen ist Gleichheit: „$\subset$" klar „$\supset$" Wegen $\lambda_1 \neq 0$ gilt $\vec{v}_1 \in \langle (M \setminus \{\vec{v}_1\}) \cup \{\vec{w}\} \rangle$. Für jedes $\vec{v} \in V$ gilt dann: $\vec{v} \in V = \langle M \rangle = \langle (M \setminus \{\vec{v}_1\}) \cup \{\vec{v}_1\} \rangle$

$$\Rightarrow \vec{v} = \sum_{i=2}^{n} \mu_i \vec{v}_i + \mu_1 \vec{v}_1 = \sum_{i=2}^{n} \mu_i \vec{v}_i + \mu_1 \cdot \left(\left(\sum_{j=2}^{n} \sigma_j \vec{v}_j + \sigma_1 \vec{w} \right) \right) \in \langle (M \setminus \{\vec{v}_1\}) \cup \{\vec{w}\} \rangle$$

Zu $\boxed{2}$ Es sei: $\vec{0} = \sum_{i=2}^{n} \mu_i \vec{v}_i + \mu \vec{w}$. Dann

$$\vec{0} = \sum_{i=2}^{n} \mu_i \vec{v}_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \sum_{i=2}^{n} (\mu_i + \mu \lambda_i) \vec{v}_i + \mu \lambda_1 \vec{v}_1 \underset{\lambda_1 \neq 0}{\overset{M \text{ l.u.}}{\Longrightarrow}} \forall i \in \{2, \dots, n\}: \mu_i + \mu \lambda_i = 0$$

und $\mu \lambda_1 = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$ □

Beispiel 58 Anwendungen des Austauschlemmas

$\boxed{1}$ Überprüfe Vektoren auf l.u. zB $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{array} \mapsto \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{array}$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{matrix}$$

$$\mapsto \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix} \qquad \text{Austauschsatz} = \text{Zeilenumformungen}$$

Diese Vektoren sind l.u. $\Rightarrow$ Ausgangsvektoren l.u.

$\boxed{2}$ Berechne Erzeugnis von Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow M := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von M

Satz 59 (Austauschsatz) Es sei $\mathcal{B} := \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ Basis eines Vektorraumes V und $L \subset V$ eine linear unabhängige Menge. Dann gibt es $K \subset \mathcal{B}$ mit $|K| = |L|$ so dass $(\mathcal{B} \setminus K) \cup L$ Basis von V ist.

Beweis mit Induktion über $|L|$. $\square$

Bemerkung 60 Satz 59 besagt, dass im Falle einer endlichen Basis $\mathcal{B}$, jede l.u. Menge weniger oder gleichviele Elemente als $\mathcal{B}$ hat und dass diese im $\mathcal{B}$ eingewechselt werden können. Die

man einwechselt ist unklar.

Basisergänzungssatz

Satz 61 (Basisergänzungssatz)

Es sei V Vektorraum und $M \subset V$ endlich mit $\langle M \rangle = V$.

Es sei $L := \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\} \subset V$ l.u. Dann gibt es $\{\vec{w}_{m+1}, \ldots, \vec{w}_r\} \subset V$ so dass $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_r\}$ Basis von V ist.

Beweis Nach Basisauswahlsatz können wir aus M eine Basis $\mathcal{B}$ von V auswählen. Nach Satz 59 können wir L nach $\mathcal{B}$ einwechseln, so dass $L \cup \mathcal{B} \setminus L$ Basis von V ist. Setze $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{v}_r\} := \mathcal{B} \setminus L$ $\square$