23.11.16

Donnerstag, 16. November 2023 12:01

Dimension

Korollar 62 Hat ein Vektorraum eine Basis mit endlich viel Elementen, dann hat jede Basis endlich viele Elemente.

ausgelassen

Beweis Sei $L \subset V$ Basis mit endlich vielen Elementen und $K \subset V$ eine weitere Basis mit unendlich vielen Elementen. Da K linear unabhängig ist, ist jede Teilmenge von K linear unabhängig. Da K unendlich viele Elte hat gibt es eine Teilmenge S mit $|L|+1$ Elementen. Nach Satz 59 gilt $|S| \leq |L|$ im ↯ zu $|S| = |L|+1$ $\square$

Korollar 63 Je zwei endliche Basen eines Vektorraums haben gleich viele Elemente

Beweis Seien $L \subset V$ und $K \subset V$ Basen von V. Dann sind L, K jeweils linear unabhängig. Also $|L| \leq |K|$ und $|K| \leq |L|$ nach Satz 59 $\square$

Theorem 64 Jeder Vektorraum hat eine Basis. $\square$

Definition 65 $V \in K\text{-Vec}$. Man dfn. <u>Dimension</u> von V

$$\dim_K V := \begin{cases} \infty & : \exists \text{ keine endliche Basis} \\ r & : \text{Länge einer endlichen Basis ist } r \end{cases}$$

Bemerkung 66

$\boxed{1}$ Theorem 64 verwendet axiomatische Hilfsmittel aus der Mengenlehre, sofern ein Vektorraum nicht endlich erzeugt ist.

$\boxed{2}$ Wegen Korollar 61 und 62 ist der Begriff der Dimension wohldefiniert.

$\boxed{3}$ $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathrm{Mat}_{m,n} = m \cdot n$, $\dim \mathcal{P}_n = n$, $\dim \mathcal{P} = \infty$, $\dim \mathbb{L}_{(A|0)} = n - r$ (r aus sZSTF)

Korollar 67 Es seien W, V Vektorräume mit $W \subset V$.

$\boxed{\text{endlich erzeugte}}$

Dann gelten:

$\boxed{1}$ $\dim W \leq \dim V$ $\boxed{2}$ $\dim W = \dim V \Rightarrow$

[1] $\dim W \leq \dim V$ [2] $\dim W = \dim V \Rightarrow$

$W = V$

Beweis zu [1] Nach Basisauswahlsatz können wir aus den EZS Basen $\mathcal{B}_W$, $\mathcal{B}_V$ von W bzw. V auswählen. Nach S59 ist $|\mathcal{B}_W| \leq |\mathcal{B}_V|$.

ausgelassen

Zu [2] zu zeigen ist $V \subset W$. Angenommen $V \setminus W \ni \vec{v}$. Es sei $\mathcal{B}_W := \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$. Angenommen $\mathcal{B}_W \cup \{\vec{v}\}$ ist l.a., dann gibt es nicht-triviale Liko $\vec{0} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{w}_i + \lambda \vec{v}$. Da $\mathcal{B}_W$ l.u. ist, ist $\lambda \neq 0$. Also $\vec{v} \in \langle \mathcal{B}_W \rangle = W$ im Widerspruch zu $\vec{v} \in V \setminus W$. Also ist $\mathcal{B}_W \cup \{v\}$ l.u. Daher gilt nach S 59: $|\mathcal{B}_W \cup \{\vec{v}\}| \leq |\mathcal{B}_V|$, also $\dim W + 1 \leq \dim V$, also $1 \leq 0$ nach Vor. $\square$

Situation im $\mathbb{R}^3$.

Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$

Donnerstag, 16. November 2023
07:56

Es sei $U \subset \mathbb{R}^3$ ein Untervektorraum. Nach KorollarGT gilt $\dim U \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Also

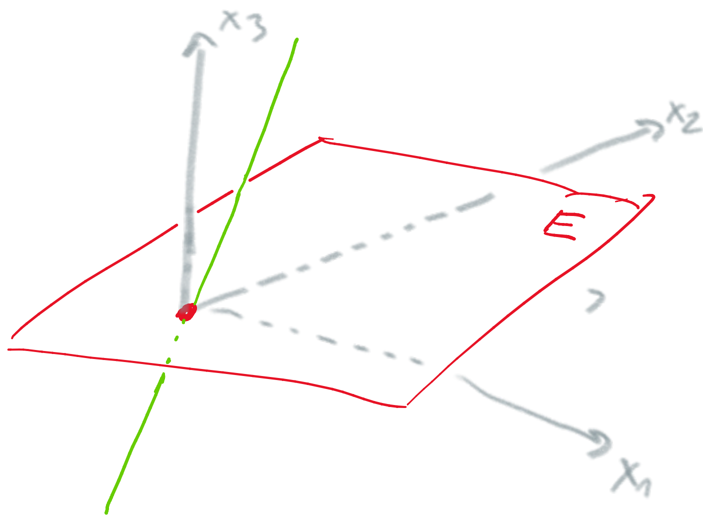
1. Fall $\dim U = 0 \Rightarrow U = \{(0,0,0)\}$

2. Fall $\dim U = 1 \Rightarrow U = \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

__2 Fall__ $\dim U = 1 \Rightarrow U = \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ heißt __Gerade__

__3 Fall__ $\dim U = 2 \Rightarrow U = \{\lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}, \vec{v}, \vec{w}$ l.u. heißt __Ebene__

__4 Fall__ $\dim U = 3 \Rightarrow U = \mathbb{R}^3$



Ebenen

$\boxed{1}$ Sei $(A|0)$ erw. Koeffizientenmatrix eines LGS mit $\operatorname{rang} A = r$, $A \in \mathrm{Mat}_{m,3}$. Dann $\dim \mathbb{L}_{(A|0)} = 3 - r$. Für $r \in \{0,1,2,3\}$ erhalte obige Fälle denn $\mathbb{L}_{(A|0)} \subset \mathbb{R}^3$ ist UVR. Sei $r = 1$ dann ist eine sZSTF von A von der Gestalt $(1 \quad b \quad c)$ wo $b=0$ oder $c=0$ möglich ist. Also sind die Lösungen von LGS der

Also sind die Lösungen von LGS der Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ Ebenen in $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{2}$ Sei umgekehrt eine Ebene $E_{\vec{v},\vec{w}} = \{ \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$ vorgelegt. Definiere

$$\vec{n} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - w_2 v_3 \\ -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Def: Kreuzprodukt von $\vec{w}$ mit $\vec{v}$

nachrechnen!

Dann gilt $n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3 = 0$ und

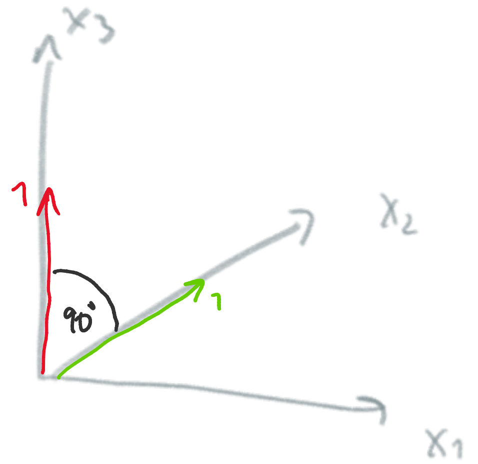
$n_1 w_1 + n_2 w_2 + n_3 w_3 = 0$

also für $A = (n_1 \ n_2 \ n_3)$ ist $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{L}(A|0)$ und somit $\mathbb{L}(A|0) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

Skalarprodukt

Für Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ heißt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ Skalarprodukt von $\vec{x}$ mit $\vec{y}$.

Für $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ heißen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ senkrecht. Im $\mathbb{R}^3$ bedeutet dies, dass $\vec{x}$ und $\vec{y}$ einen Winkel von $90°$ einschliessen und $\vec{y}$ einen Winkel von 90° einschliessen



$$\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Für eine Ebene E wie oben heißt dass:

$$E_{(\vec{v},\vec{w})} = \mathbb{L}_{(\vec{n}|0)} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 0\}$$

Man nennt $\vec{n}$ den <u>Normalenvektor</u> an $E_{\vec{v},\vec{w}}$. Er steht senkrecht auf der Ebene. Jede Ebene ist durch einen Normalenvektor festgelegt $\square$

1.4 Lineare Abbildungen

Einführung Bekannt sind Funktionen ($\hat{=}$ Abbildungen) vom Typ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, beispielsweise $f(x) := x^3 + 2x$ oder $f(x) := \sqrt{x}$. Diese sind i. allgemeinen nicht "linear" als Funktionsgraph. Wir wollen uns auf "lineare" Abbilduonsgraph. Wir wollen uns auf "lineare" Abbildungen beschränken aber die Dimensionen von Definitions- und Wertebereich ändern: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definition 68 Eine Abbildung $f: V \to W$ zwischen Vektorräumen V und W heißt <u>linear</u>, falls

$\boxed{1}$ $\forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V: \; f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

$\boxed{2}$ $\forall\, \vec{v} \in V \;\forall\, \lambda \in \mathbb{R}: \; f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$

gelten.

Beispiele 69 $\boxed{1}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = ax, \; a \in \mathbb{R}$

$\boxed{2}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \; f(x_1, x_2) := (x_1 - x_2, 2x_2 + x_1, x_2)$

<u>Schreibweise</u> $f(x_1, x_2) := f((x_1, x_2))$

$\boxed{3}$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \; f(\vec{x}) := \vec{a}$ linear $\Rightarrow$

$\vec{a} = f(\vec{x} + \vec{x}) = f(\vec{x}) + f(\vec{x}) = 2\vec{a} \Rightarrow$

$\vec{a} = \vec{0}$

$\boxed{4}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x_1, x_2) := x_1 \cdot x_2$ nicht linear

denn $f(1,0) + f(0,1) = 0 + 0 = 0$ aber $f((1,1))$

$= 1 \cdot 1 = 1$ □

$= 1 \cdot 1 = 1$ $\square$

$\boxed{5}$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \in Mat_{m,n}$, $\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

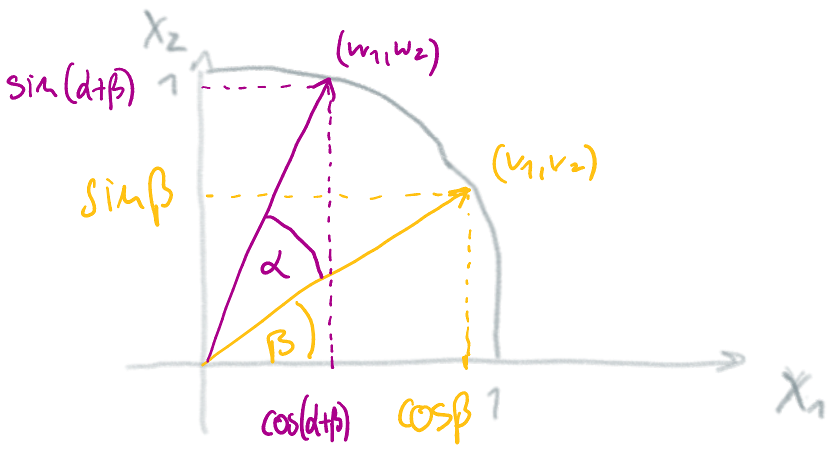
$f(\vec{x}) := A \cdot \vec{x}$ ist linear, denn

$f(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

und $f(\lambda \vec{x}) = A(\lambda \vec{x}) = \lambda A \vec{x} = \lambda f(\vec{x})$

Beispiel 70 Drehungen. Betrachte $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sei $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(v_1, v_2) \in$ Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$



$$f(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} v_1 \cos\alpha - v_2 \sin\alpha \\ v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha \\ \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{ADT}{=} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} =: \vec{w}$$

Also entsteht $\vec{w}$ durch Drehung von $\vec{v}$ um den

Also entsteht $\vec{w}$ durch Drehung von $\vec{v}$ um den Winkel α. Das gilt auch allgemein, denn $f(x,y)$

$$= f(\lambda \cdot \underbrace{(v_1, v_2)}_{\in \text{ Einheitskreis}}) = \lambda f(v_1, v_2) = \lambda \vec{w} \qquad \sqcup$$

Lineare Abbildungen und Basen

Bemerkung 71

Es sei $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ Basis eines Vektorraums, $f: V \to W$ eine lineare Abbildung und $\vec{c}_i := f(\vec{b}_i) \in W$ für $i = 1, \dots, n$. Sei $\vec{v} \in V$ mit $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i$ (eindeutige) Darstellung. Dann $f(\vec{v}) =$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\vec{b}_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{c}_i$$

<u>Das heißt</u>: die Bilder auf einer Basis reichen aus um $f(\vec{v})$ für jedes $\vec{v} \in V$ zu berechnen.

Es gilt sogar noch mehr:

Nach Beispiel 69.5 liefern Matrizen $A \in Mat_{m,n}$ lineare Abbildungen. Umgekehrt gilt: jede lineare Abbildung lässt sich durch Matrizen beschreiben:

Satz 72 Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare Abbildung,

$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ bzw. $\mathcal{B}' := \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$

Standardbasen von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$. Für

$i \in \{1, \dots, m\}$ sei $f(\vec{e}'_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{e}_i = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

als Liko der Basis $\mathcal{B}$ gegeben.

Definiere $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$ durch $A_{ij} := a_{ij}$

$1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Dann ist f eindeutig festgelegt durch

$f(\vec{x}) := A \cdot \vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Beweis Nach Bem 71 ist f durch die Bilder auf $\mathcal{B}'$ bereits festgelegt. Nach Satz 55.4 die Liko bzgl. $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt. Zu zeigen bleibt $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$. Man rechnet für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$f(\vec{x}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}'_j\right) \overset{f \text{ lin.}}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j f(\vec{e}'_j)$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{e}_i\right)}_{} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \vec{e}_i$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x} \quad \square$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x}$$

oder so

(oder so)

Beispiel 73 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \; f(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1, 2x_2 - x_1)$

1) Anwendung von Satz 72

$$f((1,0)) = (1,1,-1) = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 - 1 \cdot \vec{e}_3$$

$$f((0,1)) = (1,0,2) = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 2 \cdot \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x_1,x_2) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) Verallgemeinerung von Satz 72

Man das auch mit beliebigen Basen machen.

Wähle $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathcal{B}' := \{e_1, e_2, e_3\}$

Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw $\mathbb{R}^3$. Dann

$$f((1,1)) = (2,1,1), \quad f((1,2)) = (3,1,3)$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 74 In Satz 72 gilt also: in der j-ten Spalte von A steht das Bild des j-ten Basisvektors.

Beispi