23.11.21

Mittwoch, 22. November 2023 08:27

Kern, Bild, Rang

Es sei $f: V \to W$ lineare Abbildung zwischen Vektorräumen.

Definition 75 Das Urbild der $\vec{0} \in W$ heißt <u>Kern</u> von f und man schreibt $\ker f := f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\}$. Das <u>Bild</u> von f ist definiert durch $\operatorname{Bild} f := \{f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\} = f(V)$.

Korollar 76 $\ker f \subset V$ und $\operatorname{Bild} f \subset W$ sind Untervektorräume. **Beweis** Übung $\square$

Definition 77 Ist $f: V \to W$ lineare Abbildung, so nennt man $\operatorname{Rang} f := \dim \operatorname{Bild} f$ den <u>Rang von</u> f. Der <u>Rang einer Matrix</u> ist der Rang der zugehörigen linearen Abbildung $\square$

Bemerkung 78 Es sei $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R}^m$ die Spalten von A.

Dann gilt $\operatorname{Bild} f = \{ A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^m \} =$

$= \langle a^1, \dots, a^n \rangle \subset \mathbb{R}^m$

bzw. der Rang einer Matrix

Korollar 79 Der Rang von f ist die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spalten der Matrix.

Beweis Es sei $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$. Also $\operatorname{Bild} f$

$= \langle \underbrace{a^1, \dots, a^n}_{=:M} \rangle$ wie oben. Nach Basisauswahlsatz können wir eine Basis $\{a^{i_1}, \dots, a^{i_r}\}$ aus M auswählen. Nach Korollar haben alle Basen von $\langle M \rangle$ dieselbe Länge, also $r = \dim \langle M \rangle$

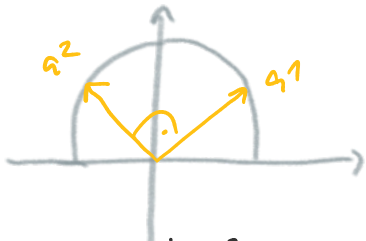
$= \operatorname{rang} f$ $\square$

Beispiel 80 $\boxed{1}$ Drehmatrix: $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ mit

Spalten a^1, a^2: $\langle a^1, a^2 \rangle = -\cos\alpha \sin\alpha + \cos\alpha \sin\alpha = 0$

Spalten a^1, a^2 : $\langle a^1, a^2 \rangle = -\cos\alpha \sin\alpha + \cos\alpha \sin\alpha = 0$

$\Rightarrow$ a^1 senkrecht a^2 : $\Rightarrow$ a^1, a^2 l.u.

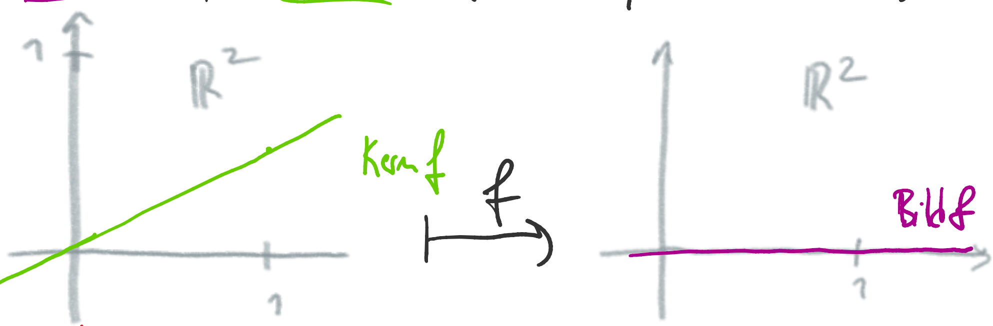


$\Rightarrow$ rang $A = 2$

$\quad = \dim \text{Bild} f \Rightarrow \text{Bild} f = \mathbb{R}^2$

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x_1, x_2) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\text{Bild} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\text{Kern} f = \{ (x_1, x_2) \mid x_2 = +\tfrac{1}{2} x_1 \}$



ausgelassen

$\boxed{3}$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, $\text{Bild} f = \mathbb{R}$

$\text{Kern} f = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 - x_2 = 0 \} = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 = x_2 \}$

<u>Beh</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linear, $U := \{ (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \} \subset \mathbb{R}^3$

ist UVR von $\mathbb{R}^3$ mit $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f(1,0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f(0,1) \end{pmatrix} \right\rangle$

<u>Bew</u> 1) $\vec{x}, \vec{y} \in U \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2,$

$f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2)) \overset{f \text{ lin}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, f(x_1 + y_1, x_2 + y_2)) \in U$

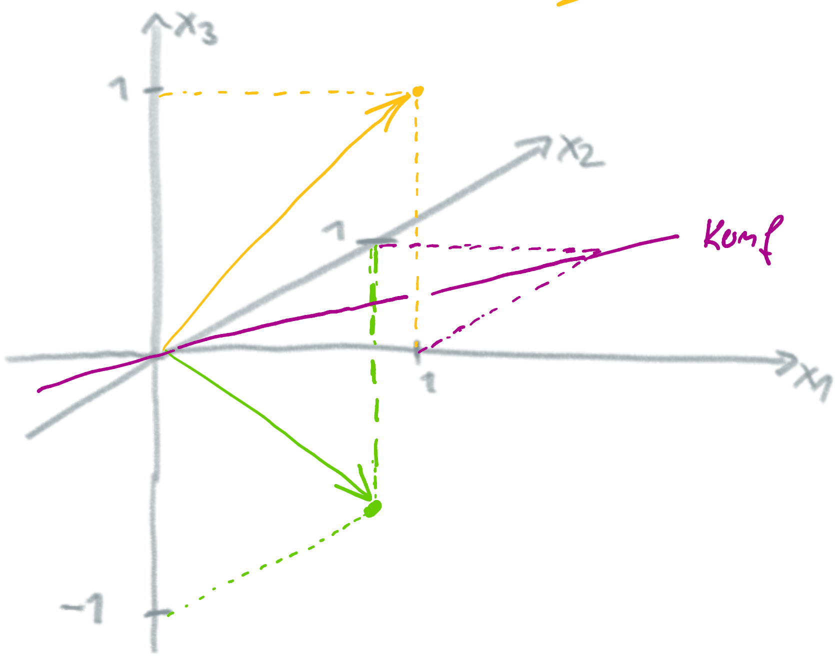
2) $\vec{x} \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$: analog

f linear

3) „$\supset$" ✓ „$\subset$" $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \end{pmatrix}$

3) „$\supset$" ✓ „$\subset$" $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(x_1 x_2) \end{pmatrix} \overset{\swarrow}{=} x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f(1,0) \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f(0,1) \end{pmatrix}$

<u>Hier</u>: $f(x_1 x_2) = x_1 - x_2$, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$



$U \cap \{(x_1,x_2,0) \mid x_1,x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1,x_2,f(x_1,x_2)) \mid x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}$

$\cap \{(x_1,x_2,0) \mid x_1,x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1,x_2) \mid f(x_1,x_2) = 0\} = \operatorname{Kern} f$

Satz 81 (Dimensionsformel) Sei $f: V \to W$ lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten Vektorräumen. Dann gilt: $\dim V = \dim \ker f + \operatorname{rang} f$

Beweis Es sei $n := \dim V$.

Beweis Es sei $n := \dim V$.

Nach Satz ist $\operatorname{Kern} f \subset V$ Untervektorraum. Nach Basisauswahlsatz und Korollar 67 können wir eine endliche Basis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\} \subset$ $\subset \operatorname{Kern} f$ mit $r \leq n$ auswählen. Nach Basisergänzungssatz können wir diese durch Vektoren $\{\vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ zu einer Basis von V ergänzen. Wir haben also $n - r = \dim V - \dim \operatorname{Kern} f$

Also ist $\operatorname{Rang} f = n - r$ zu zeigen. Wir zeigen, dass $M := \{f(\vec{v}_{r+1}), \dots, f(\vec{v}_n)\}$ eine Basis von $\operatorname{Bild} f$ ist.

$\boxed{1}$ M erzeugt $\operatorname{Bild} f$: sei dazu $\vec{x} \in \operatorname{Bild} f$, also gibt es $\vec{u} \in V$ mit $f(\vec{u}) = \vec{x}$ und $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i$.

Daher $\vec{x} = f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underbrace{f(\vec{v}_i)}_{=0} + \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i f(\vec{v}_i)$

also $\vec{x} \in \langle M \rangle$.

$\boxed{2}$ M l.u.; dazu sei $0 = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i f(\vec{v}_i)$. Also

$0 \overset{f \text{ lin.}}{=} f\left(\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i\right) \Rightarrow \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \in \operatorname{Kern} f \Rightarrow$

$$0 \overset{!}{=} f\left(\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i\right) \Rightarrow \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \in \operatorname{Kern} f \Rightarrow$$

$$\exists\, \mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R} : \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \vec{v}_i \Rightarrow$$

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \vec{v}_i - \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i \overset{\text{Basis}}{\Longrightarrow} \mu_1 = \cdots = \mu_r = \lambda_{r+1}$$

$$= \cdots = \lambda_n = 0 \quad \square$$

Lemma 82 Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m,m}$ invertierbar. Dann gelten:

1) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ l.u. $\Rightarrow A\vec{v}_1, \ldots, A\vec{v}_k$ l.u

2) $\operatorname{rang} A = m$, $\operatorname{Kern} f = \{0\}$ (wo $f(x) = Ax$).

Beweis zu 1) $\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A\vec{v}_i = A\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i\right)$

$\Rightarrow \vec{0} = A^{-1} \cdot \vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{v}_i \overset{\text{l.u.}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$

zu 2) Sei $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ durch A gegeben. Für $k = m$ also $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ Basis $\mathbb{R}^m$ folgt Bild f $= \mathbb{R}^m$, also $\dim \operatorname{Ker} f = m - \operatorname{rang} f = m - m = 0$ $\square$

Anwendung auf LGS

Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$ Koeffizientenmatrix eines LGS mit rechter Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

LGS mit Matrix A und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

mit $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$. Dann gilt: $\mathbb{L}_{(A|0)} = \operatorname{Kern} f$

und $\mathbb{L}_{(A|b)} = f^{-1}(\vec{b})$. Nach Satz ist also $\dim$

$\mathbb{L}_{(A|0)} = \dim \operatorname{Kern} f = n - r$, wobei r aus der

sZSTF kommt.

Satz 83 Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$ und $A' = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{E_r} & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right)$ eine

sZSTF von A. Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

durch A gegeben. Dann gilt $\operatorname{Rang} f = \operatorname{Rang} A$

$= r$