Beweis Zu zeigen ist nur Rang $A = r$. Dazu müssen wir zeigen, dass elementare Zeilenumformungen und Spaltenvertauschungen den Rang von A nicht ändern. (denn rang $A' = r$) Für Spaltenvertauschungen ist das klar. Es sei $A' = S \cdot A$ und S eine Elementarmatrix. Dann ist S nach Satz invertierbar. Wir können $f_S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ und $f_{S^{-1}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ als zu S und S^{-1} gehörige lineare Abbildungen definieren.

Es seien $a^1, \dots, a^n$ die Spalten von A. Dann sind $\{f_S(a^1), \dots, f_S(a^n)\} = \{Sa^1, \dots, Sa^n\}$ die Spalten von $S \cdot A$. Es sei $\tilde{r} = \text{rang}\, A$ und obdA $a^1, \dots, a^{\tilde{r}}$ linear unabhängig. Dann sind $f_S(a^1), \dots, f_S(a^{\tilde{r}})$ auch l.u. nach Lemma. Also rang $SA \geq \tilde{r}$. Wäre Rang $SA > \tilde{r}$, dann liefert $f_{S^{-1}}$ eine maximal linear unabhängige Menge von Spalten von A der Anzahl $> \tilde{r}$ im Widerspruch zu Rang $A = \tilde{r}$.

Also rang $SA = \tilde{r} = \text{rang}\, A$ $\square$

Mit dem Rangbegriff können wir Lösungsmengen

Mit dem Rangbegriff können wir Lösungsmengen von LGS charakterisieren:

Satz 84 Sei $A \in Mat_{m,n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ und $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines LGS.

1. $\text{rang}(A|b) = \text{rang}\, A \iff$ LGS ist lösbar mit $\dim \mathbb{L}_{(A|0)} = n - \text{rang}\, A$
2. $\text{rang}(A|b) > \text{rang}\, A \iff$ LGS ist nicht lösbar

Beispiel 85

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & b_2+b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot(-2) \end{array}$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1-2b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right)$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1-2b_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Spaltentausch}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2+b_1-2b_3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $\text{rang}\, A = 2$ kann man an ZSTF bereits ablesen

Hier $b_2 + b_1 - 2b_3 = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{rang}\, A = \text{rang}(A|b) = 2 \\ \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\, A = 2 < 3 = \text{rang}(A|b) \end{cases}$

Hier $b_2 + b_1 - 2b_3 = \begin{cases} 0 \; \ldots \\ \neq 0 \Rightarrow \text{rang} A = 2 < 3 = \text{rang}(A|b) \end{cases}$

$n = 6, \; r = 2, \; m = 3, \; f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$

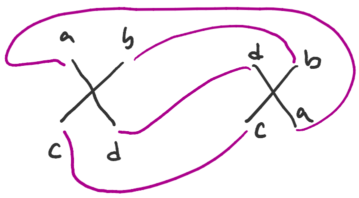
$\dim \text{Kern} f = n - \text{rang} f = 6 - 2 = 4$

$\parallel$

$\dim \mathbb{L}(A|0)$

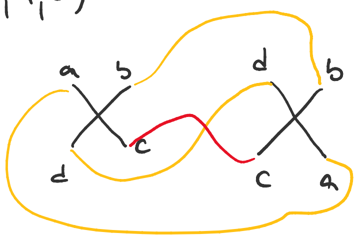
2 Virtuelle Verkettungen

Kurven und Schatten Wir betrachten „Kreuzungen" X und „Stränge" in der Ebene zusammen mit Anleitungen, wie diese verbunden werden sollen:



(a,b,c,d) (d,b,a,c)

Hier (a,b,c,d), (d,b,c,a) scheint es nicht ohne eine weitere Kreuzung zu klappen.



Man erhält so zwei verschiedene Arten von <u>Doppelpunkten</u>.

Im beiden Fällen haben wir Kurven in der Ebene gezeichnet.

Wir wollen präzisieren, was wir unter einer <u>gültigen</u>

Wir wollen präzisieren, was wir unter einer <u>gültigen Kurve</u> verstehen wollen:

2) Die Kurve ist glatt, d.h. es gibt keine "Ecken" oder "Spitzen" so dass an jedem Punkt der Kurve eine Tangente existiert. An jedem Doppelpunkt gibt es genau 2 verschiedene Tangenten.

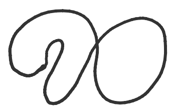
1) Schnittpunkte werden von höchstens zwei Abschnitten der Kurve gebildet. Solche Schnittpunkte heißen <u>Doppelpunkte</u>

3) Die Kurve kann durch endlich viele lineare Teilstücke approximiert werden.

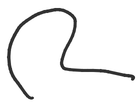
Eine Menge von $m \in \mathbb{N}$ solcher gültigen Kurven nennt man <u>Schatten</u>.

Beispiel 1

a)

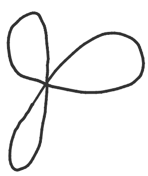


<u>geschlossene</u> gültige Kurve



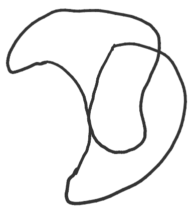
<u>nicht geschlossene</u> gültige Kurve

b)



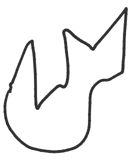
<u>nicht gültig</u>

(wg 1))



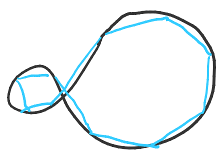
<u>nicht gültig</u>

(wg 2))



<u>nicht gültig</u>

(wg 2))



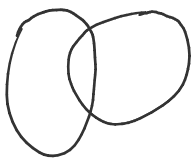
<u>lineare Approximation</u>

(wg 21)

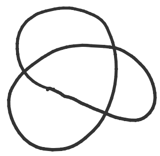
Approximation

Definition 2 Eine Menge von $n \in \mathbb{N}$ gültigen geschlossenen Kurven nennt man Schatten. Eine einzelne solche Kurve nennt man Komponente. Eine Kante ist ein Segment der Kurve zwischen 2 Doppelpunkten.

Beispiel 3

a) 

2 Komponenten
2 Doppelpunkte
4 Kanten

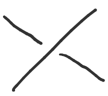
b) 

1 Komponente
3 Doppelpunkte
6 Kanten

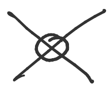
Bemerkung 4 Ein Schatten mit $n \in \mathbb{N}$ Doppelpunkten hat $2n$ Kanten.

Virtuelle Diagramme

Definition 5 Ein virtuelles Diagramm ist ein Schatten zusammen mit Kreuzungsinformationen

a) 

klassische Kreuzung

b) 

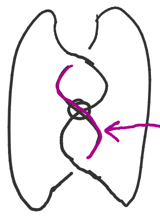
virtuelle Kreuzung

Ein virtuelles Knotendiagramm hat genau eine Komponente.
Ein virtuelles Verkettungsdiagramm hat mehr als eine Komponente.

Ein virtuelles <u>Verkettungsdiagramm</u> hat mehr als eine Komponente.

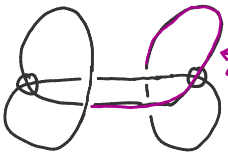
Ein <u>Bogen</u> eines virtuellen Diagramms beginnt und endet an einer unterkreuzenden Information einer klassischen Kreuzung.

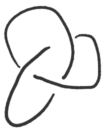
Beispiel 6

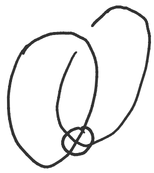
a) 

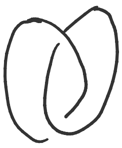
virtueller Kleeblattknoten

c)  trivialer Knoten

b)  Kishino's Knoten

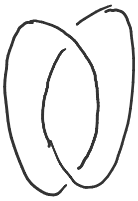
d)  Kleblattknoten

e)  virtueller Hopf Verkettung

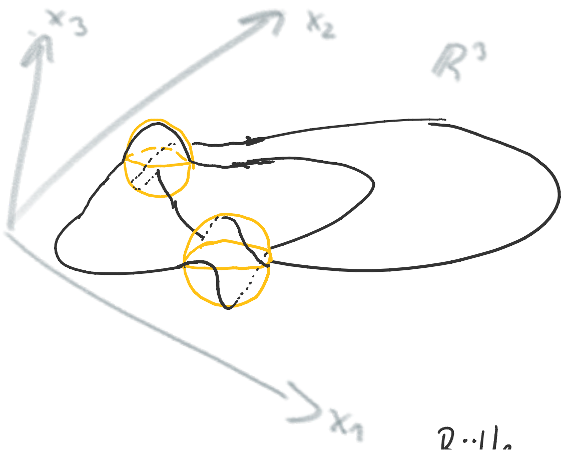
f)  Hopf-Verkettung

Räumliche Verkettungen

Eine virtuelles Diagramm <u>ohne</u> virtuelle, also nur mit klassischen Kreuzungen läßt sich wie folgt in $\mathbb{R}^3$ interpretieren:



Hopf-Verkettung



Kreuzungen werden zu Bällen $\subset \mathbb{R}^3$

Außerhalb der

Bälle $\mathbb{R}^2$

x_1 Bilde im $\mathbb{R}^2$

Projektion in „x_3- Richtung“ auf $\mathbb{R}^2$

Die Kurve im $\mathbb{R}^3$ die man so erhält liefert eine Verkettung im $\mathbb{R}^3$ und somit eine andere Theorie. K. Reidemeister hat 1932 gezeigt, dass die Theorie der Diagramme (das machen wir) und die der räumlichen Verkettungen (wie immer die auch aussieht) äquivalent sind.

Für Verkettungen mit virtuellen Kreuzungen geht das auch, ist aber geometrisch schwieriger (~ Kuperberg 2003)