23.11.28

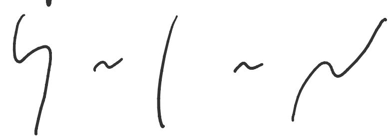
Dienstag, 28. November 2023 22:28

Reidemeister-Bewegungen

Frage: wann sollen zwei VD (virtuelle Diagramme) als gleich betrachtet werden. Dann betrachten wir Diagrammbewegungen. Bezüglich der Bögen eines Diagramms sollen Dehnen/Strecken, Verschieben keine neuen Typen ergeben. Das wollen wir <u>ebene Isotopie</u> nennen.

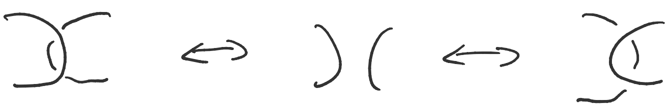
Definition 92 Zwei virtuelle Diagramme D und D' heißen <u>äquivalent</u>, $D \sim D'$, falls sie durch eine endliche Folge von <u>ebenen Isotopien</u>, <u>Reidemeister</u>- oder <u>virtuellen</u> <u>Reidemeister-bewegungen</u> ineinander überführt werden können:

$\boxed{0}$ ebene Isotopie :

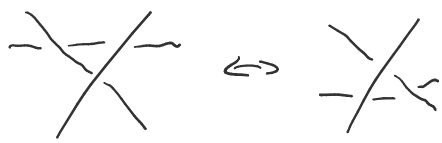


$\boxed{1}$ RI :

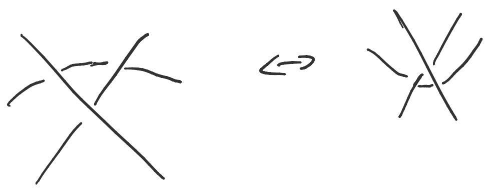
$\boxed{2}$ RII :



$\boxed{3}$ RIII : a)



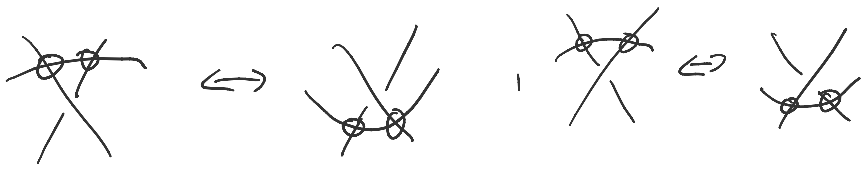
b)



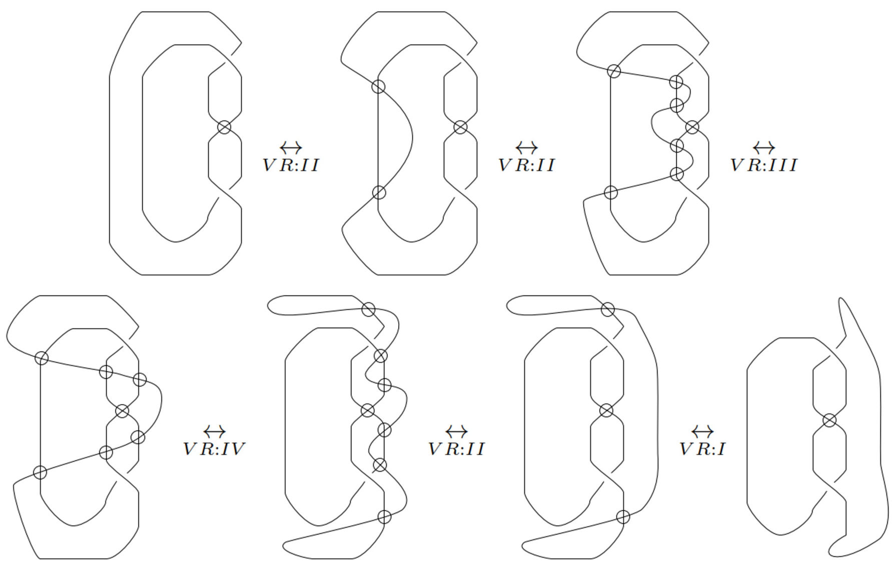
$\boxed{4}$ vR I: 

$\boxed{5}$ vR II: 

$\boxed{6}$ vR III: 

$\boxed{7}$ vR IV: 

Beispiel 93



Satz 34 Die Bewegungen $\boxed{0}$ bis $\boxed{7}$ aus Definition 7 definieren eine Äquivalenzrelation auf der Menge V_d der vD.

Beweis ① $D \sim D$ durch keine Folge von Bewegungen

② $D_1 \sim D_2 \Rightarrow$ Folge von Bewegungen von D_1 nach D_2 in umgekehrter Reihenfolge von D_2 nach $D_1 \Rightarrow D_2 \sim D_1$

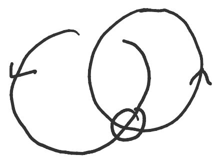
③ $D_1 \sim D_2$, $D_2 \sim D_3$: hintereinanderausführen der Bewegungen $\Rightarrow D_1 \sim D_2$

Bewegungen $\Rightarrow D_1 \sim D_3$ $\square$

Definition 15 Eine <u>virtuelle Verkettung</u> / <u>Knoten</u> ist eine Äquivalenzklasse eines vD. Die Menge der virtuellen Verkettungen ist $\mathcal{V} := \{[D] \mid D \text{ ist vD}\}$. Eine Verkettung $L \in \mathcal{V}$ heißt <u>klassisch</u>, falls es ein $D \in \mathcal{V}_d$ ohne virtuelle Kreuzungen gibt, so dass $L = [D]$. Also $L \subset \mathcal{V}$.

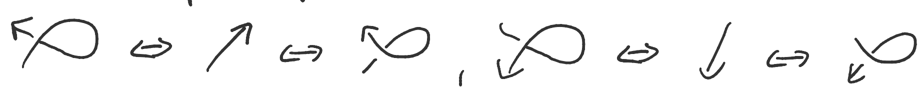
Orientierte Diagramme

Ein vD heißt <u>orientiert</u>, falls jede Komponente mit einer Durchlaufrichtung versehen ist. Dies geschieht durch Anfügen eines Pfeiles an die Komponente, zB

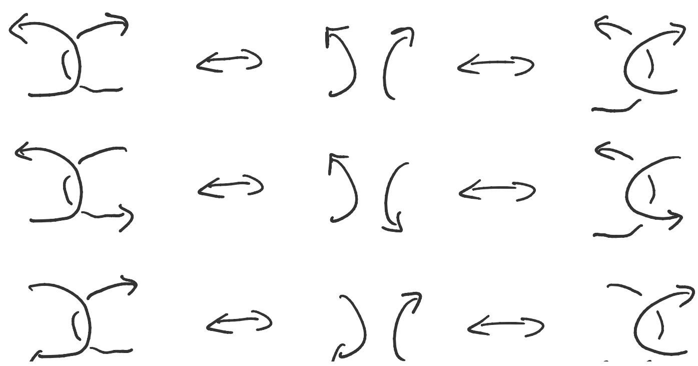


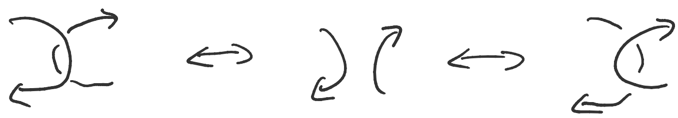
Für die Äquivalenz orientierter vD brauchen wir entsprechend <u>orientierte</u> Reidemeister-Bewegungen. Diese entstehen durch alle Möglichkeiten, die Pfeile an wählen zum Beispiel für RI und RII

$\boxed{1}$ RI :



$\boxed{2}$ RII ::



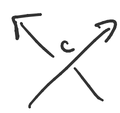
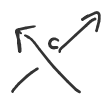


Selbstschnittzahl

Eine Abbildung $: \mathcal{D} \to S$ in eine Menge S heißt <u>Verkettungsinvariante</u> (VI) falls für $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_d$ gilt: $D_1 \sim D_2 \Rightarrow I([D_1]) = I([D_2])$. Dabei kann $\sim$ die orientierte oder nicht-orientierte Äquivalenz sein. Die Kontraposition ergibt dann: $I([D_1]) \neq I([D_2]) \Rightarrow D_1 \not\sim D_2$. So kann man entscheiden, dass Verkettungen nicht äquivalent sind.

Korollar 96 Es seien $D, D' \in \mathcal{D}_d$ Diagramme, die aus einer Diagrammbewegung auseinander hervorgehen. Eine Abbildung $I: \mathcal{D} \to S$ ist eine VI, falls $I([D]) = I([D'])$ gilt.

Beweis Es seien $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_d$ äquivalent, dann gibt es eine Folge von Diagrammbewegungen, die D_1 und D_2 überführt, also $D_1 = E_0 \sim E_1 \sim \dots \sim E_n = D_2$. Nach Voraussetzung gilt $I([E_j]) = I([E_{j+1}])$ also $I([D_1]) = I([D_2])$ □

In einem orientierten Verkettungsdiagramm ergeben sich zwei Typen von klassischen Kreuzungen:  . Man nennt ε das <u>Vorzeichen</u> der Kreuzung.

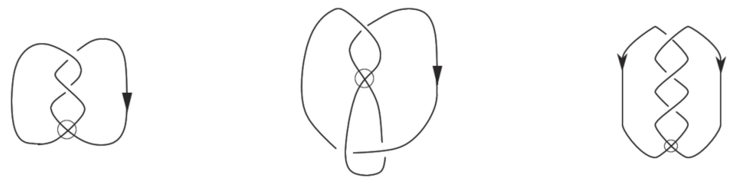
$\varepsilon(c) = +1$ $\varepsilon(c) = -1$

Definition 97 Die Selbstschnittzahl eines einfachen Diagramms der Kreuzung.

Definition 97 Die Selbstschnittzahl eines orientierten Diagramms ist die Summe der Vorzeichen aller klassischen Kreuzungen:

Schreibe $$w(D) := \sum_{c \text{ klassische Kreuzung}} \varepsilon(c).$$

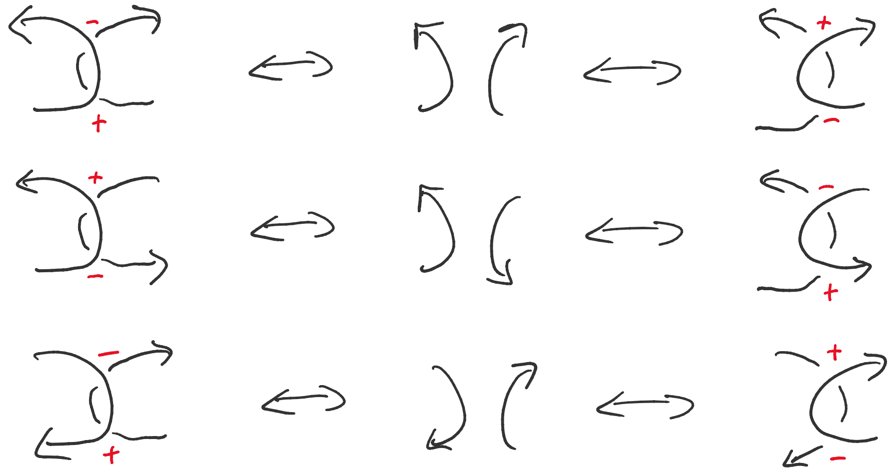
Beispiel 98



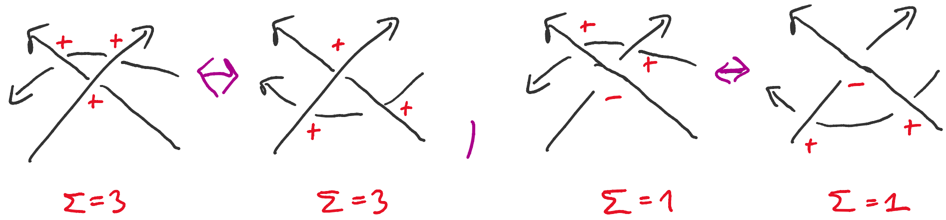
(a) $w(K_1) = -2$ (b) $w(K_2) = -1$ (c) $w(K_3) = 3$

Satz 99 Die Selbstschnittzahl ist invariant unter allen RMB außer RMB I.

Beweis Für die virtuellen RMB ist das klar. Also betrachten wir RMB II: Nach Korollar reicht es lokal zu gucken:



Nach Üb7 müssen wir nur zwei verschiedene RMB III betrachten:



Für RMB I gilt offenbar $w(D) = w(RMI(D)) \pm 1$ $\square$