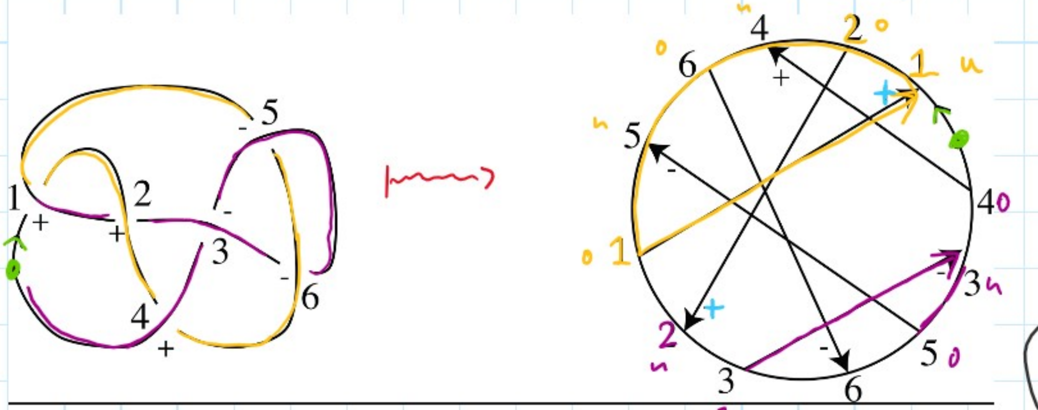
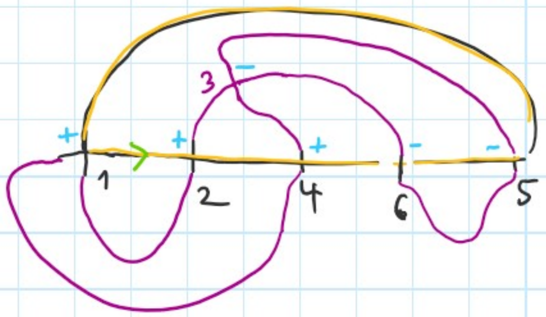
23.12.05

Donnerstag, 23. November 2023 14:25

Gauss-Diagramm





klassisches Knoten- erhalte Diagramm aus Gauss-Diagramm.

Bemerkung 109 Sei c eine Kreuzung aus einem Gaus, Diagramm ($\hat{=}$ Markierung). Diese taucht zweimal auf. Sei A_c und B_c die Anzahl der Markierungen auf den beiden Kreissegmenten, die durch c geliefert werden. Dann sind A_c und B_c beide gerade oder beide ungerade.

Denn wäre OBdA A_c ungerade und B_c grade, dann ist $2 + A_c + B_c$ (die Anzahl aller Markierungen) ungerade. Weil jede Kreuzung zweimal durchlaufen wird ist dies ein Widerspruch.

orientiertes ein Knotendiagramm klassische

Definition 110 Es sei $D \in V_d$. Eine Kreuzung c

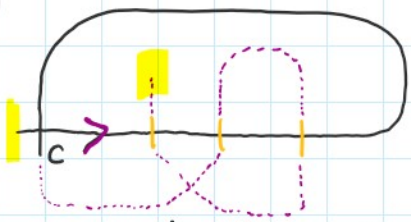
Definition 110 Es sei $D \in V_d$. Eine Kreuzung c von D heißt <u>gerade</u> / <u>ungerade</u>, falls A_c (und B_c) gerade / ungerade ist. Es seien $\mathrm{odd}(D)$ die Menge der ungeraden Kreuzungen von D. Dann heißt

$$w_{odd}(D) := \sum_{c \in \mathrm{odd}(D)} \varepsilon(c)$$

<u>ungerade</u> <u>Selbstschnittzahl</u> (<u>odd</u> <u>writhe</u>) □

Lemma 111 Sei $L \in V$ klassischer orientierter Knoten. Dann sind alle Kreuzungen eines Diagramms von L gerade.

Beweis Wir starten gemäß Orientierung an einer Kreuzung c von D: Angenommen wir treffen eine <u>ungerade Anzahl</u> an Kreuzungen auf dem Weg von c nach c. Dann

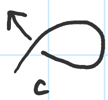


kann mindestens ein Strang nicht mit einem anderen innerhalb der Schlaufe verbunden werden. (⚠ es gibt keine virtuellen Kreuzungen) □

Satz 112 w_{odd} ist eine Invariante orientierter virtuelle Knoten.

Korollar 113 $W_{odd}(D) \neq 0 \overset{111/112}{\Rightarrow} D$ ist kein klassischer Knoten.

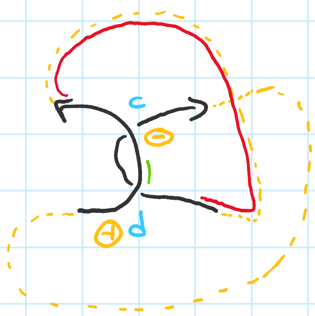
Beweis Satz 112 Wir prüfen die RMB. Die virtuellen Bewegungen ändern an den klassischen Kreuzungen nichts.

<u>Zu RMB I</u> 

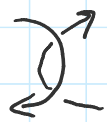
Hier ist c eine gerade Kreuzung ändert also an W_{odd} nichts.

<u>Zu RMB II</u> Wir betrachten zunächst 

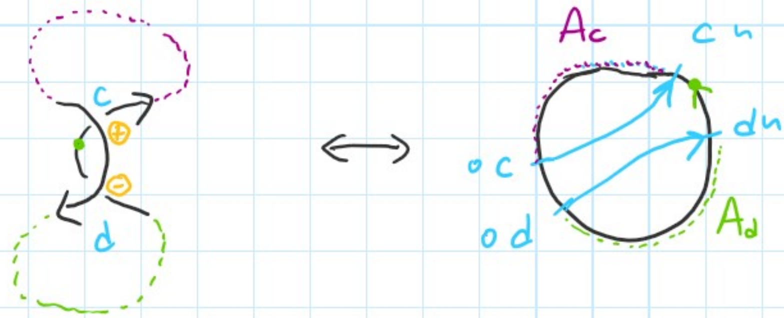
. Da es sich um einen Knoten handelt sieht das Diagramm ausserhalb so aus:



Wenn c ungerade ist, dann zählt man auf roten Abschnitt eine gerade Anzahl Markierungen. Also ist auch d ungerade. Also c ungerade $\Leftrightarrow$ d ungerade. Falls $c, d \notin odd(D)$ liefern sie keinen Beitrag falls $c, d \in odd(D)$ liefern sie: $1 - 1 = 0$ als Beitrag an W_{odd}.

Nun betrachten wir die zweite Möglichkeit: 

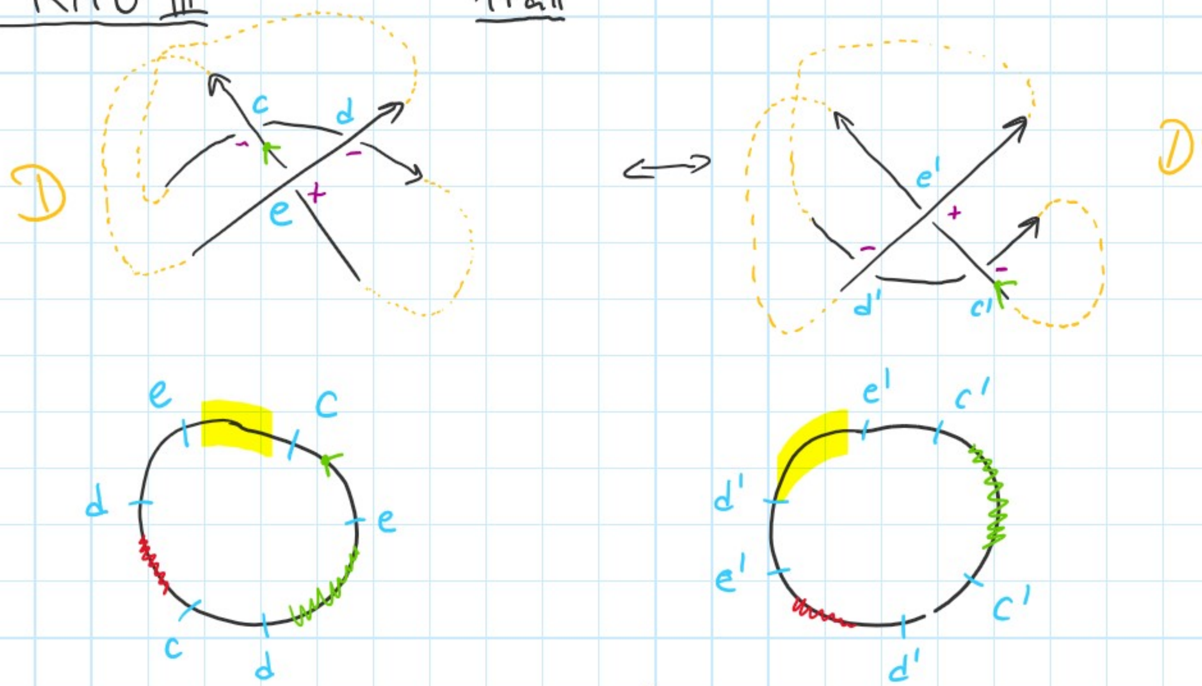
Nun betrachten wir die zweite Möglichkeit:



Also A_c und A_d beide gerade oder beide ungerade.

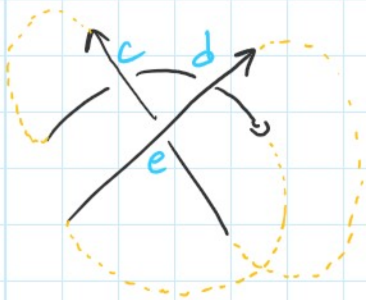
Weil $\varepsilon(c) = 1 = -\varepsilon(d)$ bleibt w_{odd} unverändert.

Zu RMB III   1 Fall



Man erkennt für $x \in \{c, d, e\}$: x ungerade $\Leftrightarrow$ x' ungerade. Da die Summe der Vorzeichen in D gleich der im D' ist, bleibt w_{odd} unverändert.

2 Fall

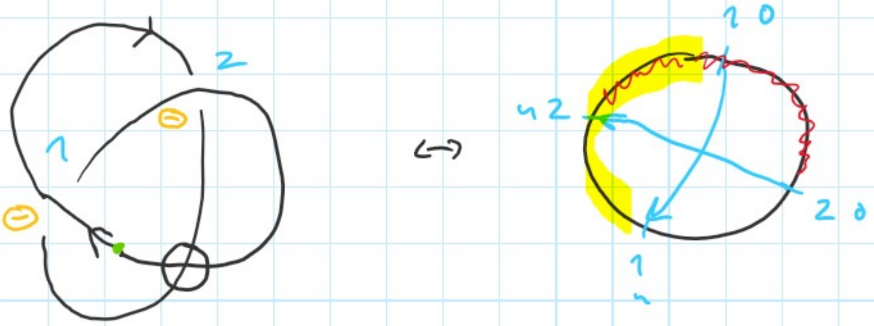


Übung!

Betrachten wir nun die RMB III mit $\varepsilon(e) = -1$ ändert sich an der Argumentation nichts. □

Beispiel 114

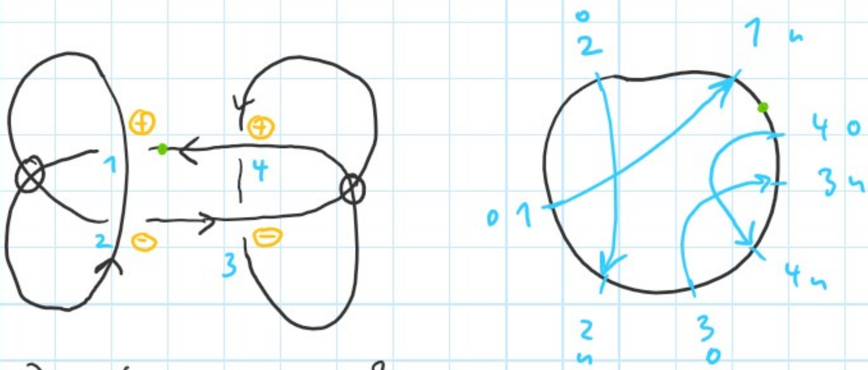
1)



Also $\mathrm{odd}(D) = \{1, 2\}$, also $w_{odd}(D) = -2$

$\Rightarrow$ virtual trefoil <u>nicht</u> klassisch und <u>nicht trivial</u>

2)



$\mathrm{odd}(D) = \{1, 2, 3, 4\}$

$w_{odd}(D) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

Das Klammerpolynom

1984 = Jones-Polynom = Fields-Medaille 1985

1987 = Klammerpolynom von L. Kauffman =

1987 = Klammerpolynom von L. Kauffman =

= Jones-Polynom mit kombinatorischem Zugang

Das Klammerpolynom ist ein Polynom in Variablen A und A^{-1}, z.B.: $2A^{-1}+3+A$. Man rechnet mit Variablen wie üblich: $A^{-1}\cdot A^2 = A$, $A^{-1}\cdot A = A^0 = 1$, $A\cdot A = A^2$

Definition 115 Es sei $D \in V_d$. Das <u>Klammerpolynom</u> $\langle D \rangle$ wird sukzessive nach folgenden Regeln berechnet:

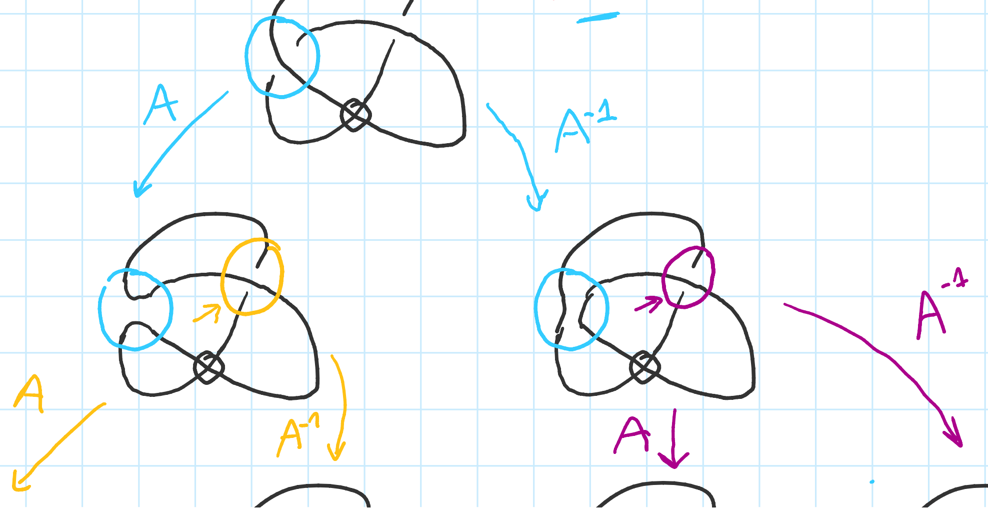
$\boxed{\text{I}}$ $\langle \times \rangle = A \langle)(\rangle + A^{-1} \langle \asymp \rangle$ (<u>skein</u> relation)

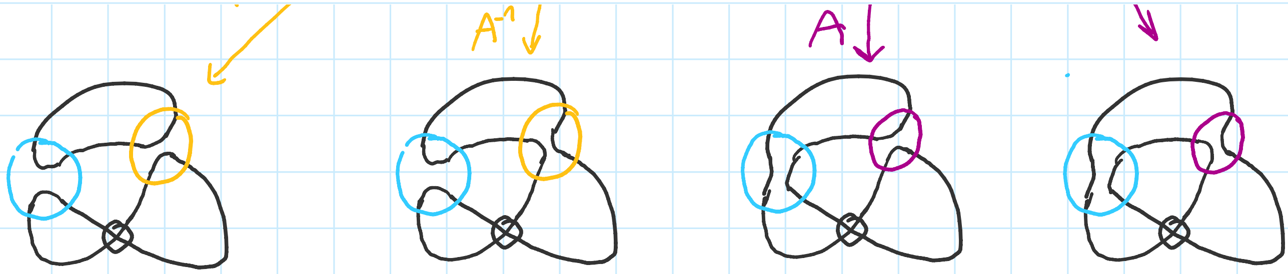
$\boxed{\text{II}}$ $\langle O \cup K \rangle = -(A^2+A^{-2}) \langle K \rangle$ (Vereinigung mit trivialer Komponente)

$\boxed{\text{III}}$ $\langle O \rangle = 1$

Beispiel 117 Virtuelles Kleeblatt

$\langle \times \rangle = A \langle)(\rangle + A^{-1} \langle \asymp \rangle$





$\langle OO \rangle =$ 1 1 1

$$\overset{\text{(I)}\,\text{(III)}}{=} -(A^2+A^{-2})\cdot 1$$

$$\Rightarrow \langle D \rangle = A\cdot A\cdot\left(-(A^2+A^{-2})\right) + A\cdot A^{-1}\cdot 1 + A^{-1}\cdot A\cdot 1 + A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot 1$$

$$= A^2(-A^2-A^{-2}) + 1 + 1 + A^{-2}$$

$$= -A^4 - A^0 + 2 + A^{-2} = -A^4 + 1 + A^{-2}$$