

Satz 118 $\langle \cdot \rangle$ ist invariant unter allen RMB außer

RMB I klassisch, hier gilt $\langle \psi \rangle = -A^{-3} \langle - \rangle$.

$$\langle \rho \rangle = -A^3 \langle - \rangle$$

Beweis Invariant unter den rein virtuellen RMB: ✓.

Zu RMB II: $\underline{\sigma} \leftrightarrow \gamma$ ($\underline{\rho} \leftrightarrow \gamma$ analog)

$$\langle \underline{\sigma} \rangle = A \langle \underline{\gamma} \rangle + A^{-1} \langle \underline{\sigma} \rangle$$

$$= A^2 \langle \underline{\gamma} \rangle + AA^{-1} \langle \underline{\gamma} \rangle + \\ + A^{-2}A \langle \underline{\sigma} \rangle + A^{-2} \langle \underline{\sigma} \rangle$$

$$= \underline{A^2} \langle \underline{\gamma} \rangle + \langle \gamma \rangle + \underline{(-A^2 - A^{-2})} \langle \underline{\sigma} \rangle + \underline{A^{-2}} \langle \underline{\sigma} \rangle$$

$$= \langle \gamma \rangle$$

Zu RMB III

$$\langle \cancel{\sigma} \rangle = A \langle \gamma \rangle + A^{-1} \langle \cancel{\sigma} \rangle$$

$$\stackrel{\text{RMB II}}{=} A \langle \gamma \rangle + A^{-1} \langle \cancel{\sigma} \rangle$$

$$= \langle \text{diagram with two crossings} \rangle$$

zu RMB IV $\langle \text{diagram with two crossings and two dots} \rangle = A \langle \text{diagram with two crossings} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagram with two crossings and a loop} \rangle$

RMB II

$$= A \langle \text{diagram with two crossings and two dots} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagram with two crossings and a loop} \rangle$$

$$= \langle \text{diagram with two crossings and two dots} \rangle$$

zu RMB I $\langle \text{diagram with a loop} \rangle = A \langle \text{diagram with a loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagram with a loop} \rangle$

$$= A \langle 1 \rangle + (-A^2 - A^{-2}) A^{-1} \langle 1 \rangle$$

$$= (A - A - A^{-3}) \langle 1 \rangle = -A^{-3} \langle 1 \rangle$$

$$\langle \text{diagram with a loop} \rangle = A \langle \text{diagram with a loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagram with a loop} \rangle$$

$$= A(-A^2 - A^{-2}) \langle 1 \rangle + A^{-1} \langle 1 \rangle$$

$$= (-A^3 - A^{-1} + A^{-1}) \langle 1 \rangle$$

$$= -A^3 \langle 1 \rangle$$

□

Wegen Satz 118 können wir uns nun von RMB I.

Definition 119 Es sei $D \in \mathcal{V}_d$ orientiert. Dann heißt

$$f_D(A) = (-A^{-3})^{w(D)} \langle D \rangle \quad \underline{f\text{-Polynom}} \quad \text{oder} \quad \underline{\text{normalisiertes Klammerpolynom von } D}$$

iktertes Klammerpolynom von D

70
isieretes Klammerpolynom von D

Satz 120 f_D ist eine Invariante orientierter virtueller Verkettungen.

Beweis Wir wissen dass $w(D)$ unter allen RMB außer RMB I unverändert bleibt. Also prüfen wir RMB I:

$$\begin{aligned} f_{\downarrow \emptyset}(A) &= (-A^{-3})^{w(\downarrow \emptyset)} \langle \downarrow \emptyset \rangle \\ &\stackrel{\text{RMB}}{=} (-A^{-3})^{w(\downarrow \emptyset)} (-A^{-3}) \langle / \rangle \\ &= (-A^{-3})^{w(/)} \underbrace{(-A^{-3})^{-1} (-A^{-3})}_{=1} \langle / \rangle \end{aligned}$$

$$w(\downarrow \emptyset) = -1 = w(/) - 1$$

$$= (-A^{-3})^{w(/)} \langle / \rangle = f_/(A)$$

$f_{\downarrow \emptyset}(A) = f_/(A)$ geht analog (Übung) \square

Bemerkung 121 Für einen orientierten Knoten

$K \in \mathcal{V}$ sei $-K \in \mathcal{V}$ derjenige Knoten mit umgekehrter Orientierung. Genauso für Diagramme $D, -D \in \mathcal{V}_d$.

Wegen $w(D) = w(-D)$ ist $f_D(A) =$

$f_{-D}(A)$. Damit ist f_D eine Invariante unorientierter Knoten.

Für Verkettungen gilt nicht id

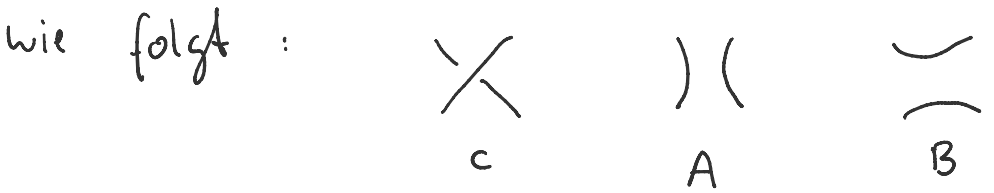
ihm terter Knoten. Für Verkettungen gilt i.A.

nicht $f_L = f_{-L}$!

Das Zustandsmodell (State Sum)

Wir kommen zurück auf Bemerkung 116 (ii) und wollen nun die Wohldefiniertheit der Klammer besprechen.

Definition 122 Es sei $D \in \mathcal{V}_d$ ein virtuelles Diagramm und c eine klassische Kreuzung. Wir definieren A-Aufspaltung und B-Aufspaltung von c



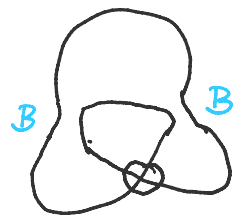
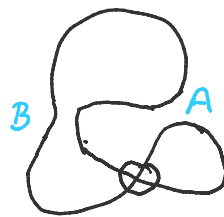
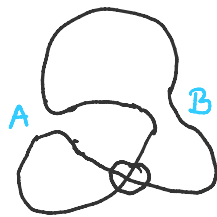
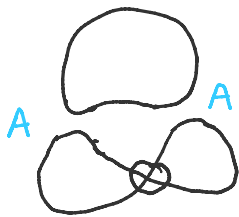
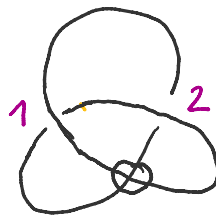
Ein Zustand von D ist eine Wahl von Aufspaltung an jeder klassischen Kreuzung von D . Wir bezeichnen dies mit $s(x_1, \dots, x_n)$ wobei $x_i \in \{A, B\}$ und c_1, \dots, c_n die klassischen Kreuzungen von D sind.

Speziell sei $s_\alpha := s(A, \dots, A)$, $s_\beta := s(B, \dots, B)$.
 Es sei S die Menge der Zustände von D . Für $s \in S$ sei $d(s)$ die Anzahl der A-Aufspaltungen und $r(s)$ die Anzahl der B-Aufspaltungen \in .

und $\beta(s)$ die Anzahl der B-Aufspaltungen. Ein Zustand $s \in S$ hat nur noch virtuelle Kreuzungen.

Die Anzahl der Komponenten von s nennen wir $|s|$

Beispiel 123 Zustände vom virtual tiefer sind die aus Beispiel 117 :



$$s_1 = s(A, A) \in S$$

$$s_2 = s(A, B) \in S$$

$$s_3 = s(B, A)$$

$$s_4 = s(B, B)$$

$$d(s_1) = 2$$

$$d(s_2) = 1$$

$$d(s_3) = 1$$

$$d(s_4) = 0$$

$$\beta(s_1) = 0$$

$$\beta(s_2) = 1$$

$$\beta(s_3) = 1$$

$$\beta(s_4) = 0$$

$$|s_1| = 2$$

$$|s_2| = 1$$

$$|s_3| = 1$$

$$|s_4| = 1$$

Man erkennt unter anderem: ein Diagramm mit n klassischen Kreuzungen hat 2^n Zustände.

Definition 124 Es sei $D \in \mathcal{V}_d$. Das Klammersymbol $\langle D \rangle$ von D ist definiert durch:

Polynom $\langle D \rangle$ von D ist definiert durch:

$$\langle D \rangle = \sum_{s \in S} A^{\alpha(s) - \beta(s)} d^{|s|-1}$$

wobei $d := -(A^2 + A^{-2})$ ist. Die Summe nennt man Zustandssumme (state sum)

Satz 12.2 Die Zustandssumme erfüllt I bis III aus

Definition 11.5.

Beweis zu I.