23.12.12

Mittwoch, 13. Dezember 2023 09:29

Satz 125 Die Zustandssumme erfüllt $\boxed{I}$ bis $\boxed{III}$ aus Definition 115.

Beweis zu $\boxed{I}$: $\langle \times \rangle = A\langle)(\rangle + A^{-1}\langle \asymp \rangle$

ausgelassen

Es sei $D = \times$, $D_A =)($, $D_B = \asymp$. Dann

Es seien S_D die Zustände von D und S_{D_A}, S_{D_B} die Zustände von D_A bzw. D_B.

Es sei $s(A) := s(A, x_2 - x_n) \in S_D$ ein Zustand von D mit A-Aufspaltung an Kreuzung 1. Analog $s(B, x_2, -, x_n) = s(B) \in S_D$ mit B-Aufspaltung.

Zu jedem $s(A) \in S_D$ gibt es genau $s'(A) := s(x_2 - x_n) \in S_{D_A}$, genauso zu jedem $s(B) \in S_D$ ein $s'(B) := s(x_2 - x_n) \in S_{D_B}$. Dabei gelten $\alpha(s(A)) = \alpha(s'(A)) + 1$

$\alpha(s(B)) = \alpha(s'(B))$, $\beta(s(A)) = \beta(s'(A))$, $\beta(s(B)) =$
$= \beta(s'(B)) + 1$. Weiter

$|s(A)| = |s'(A)|$, $|s(B)| = |s'(B)|$, also

$$\langle D \rangle = \sum_{s \in S_D} \cdots = \underbrace{\sum_{s(A) \in S_D} \cdots}_{} + \underbrace{\sum_{s(B) \in S_D}}_{} = (*)$$

$\alpha(s(A)) - \beta(s(A))$ $|s(A)| - 1$ $=$ $\alpha(s'(A)) + 1 - \beta(s'(A))$

$$= \sum_{S(A) \in S_D} A^{\alpha(S(A)) - \beta(S(A))} d^{|S(A)|-1} = \sum_{S'(A) \in S_{D_A}} A^{\alpha(S'(A))+1 - \beta(S'(A))}$$

$$\cdot\, d^{|S'(A)|-1} = A \langle S_{D_A} \rangle$$

$$\sum_{S(B) \in S_D} A^{\alpha(S(B)) - \beta(S(B))} d^{|S(B)|-1} = \sum_{S'(B) \in S_{D_B}} A^{\alpha(S'(B)) - (\beta(S'(B))+1)} d^{|S'(B)|-1}$$

$$= A^{-1} \langle S_{D_B} \rangle$$

$$= (*) = A \langle S_{D_A} \rangle + A^{-1} \langle S_{D_B} \rangle$$

Regeln $\boxed{II}$ und $\boxed{III}$ als (anspruchsvolle) Übung $\square$

Korollar 12.6 Nach Satz 12.2 lässt sich $\langle D \rangle$ also mit den Regeln aus Dfn 11.5 berechnen. Dabei ist die Reihenfolge der Auswahl der Kreuzungen bei der Auflösung unerheblich, denn die Zustandssumme hängt nicht von der Nummerierung der Kreuzungen ab.

Beispiel 12.7 Die Zustandssumme aus Beispiel 12.3 sieht so aus:

$$\sum^{4} \quad \alpha(s_i) - \beta(s_i) \quad |s_i| - 1$$

$$\langle D\rangle = \sum_{i=1}^{4} A^{\alpha(s_i)-\beta(s_i)} (\underbrace{-A^2-A^{-2}}_{=:d})^{|s_i|-1}$$

$$= A^{2-0} d^{2-1} + A^{1-1} d^{1-1} + A^{1-1} d^{1-1} + A^{0-2} d^{1-1}$$

$$= A^2 d + 1 + 1 + A^{-2} = -A^4 - 1 + 1 + 1 + A^{-2}$$

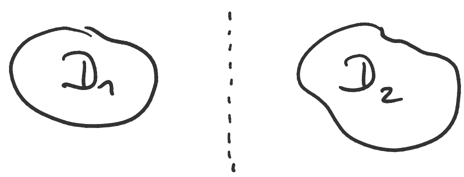
$$= -A^4 + 1 + A^{-2}$$

Zusammenhängende Summe

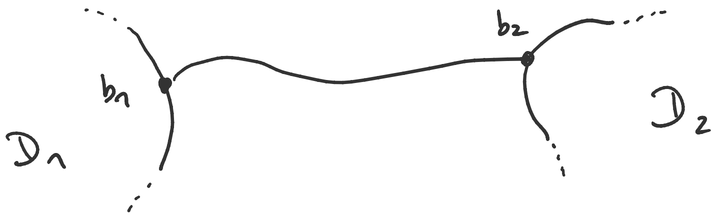
Definition 128

Knoten

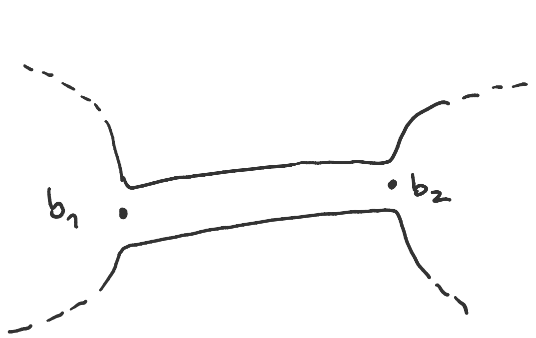
Es seien $D_1, D_2 \in V_d$ virtuelle Diagramme, die getrennt voneinander liegen:



Es seien b_1 und b_2 Punkte auf den Schatten von D_1 bzw D_2, die sich durch eine Kurve verbinden lassen, die beide Schatten nicht trifft:



. Die <u>zusammenhängende Summe</u> von D_1 und D_2 wird mit $D_1 \# D_2$ bezeichnet und wird so gebildet:



Bemerkung 129 Für klassische Diagramme hängt der Verkettungstyp von $D_1 \# D_2$ <u>nicht</u> von der Wahl von b_1 und b_2 ab (ohne Beweis). Für Diagramme mit virtuellen Kreuzungen gilt das nicht.

Satz 130 Es gilt $f_{D_1 \# D_2}(A) = f_{D_1}(A) \cdot f_{D_2}(A)$

Beweis Jeder Zustand von $D_1 \# D_2$ entsteht aus den Aufspaltungen von D_1 und D_2. Sei $s(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in S_{D_1 \# D_2}$ mit Aufspaltungen x_i in D_1 und y_i in D_2. Es seien $s_1, \dots, s_{2^n}$, $s'_1, \dots, s'_{2^m}$ die entsprechenden Zustände von D_1 bzw. D_2:

$$\langle D_1 \# D_2 \rangle = \sum_{s \in S_{D_1 \# D_2}} \dots = \sum_{\substack{s(x_1 - y_m) \\ \text{und } s'_1 \text{ fest}}} \dots + \sum_{\substack{s(x_1 - y_m) \\ \text{und } s'_2 \text{ fest}}} + \dots$$

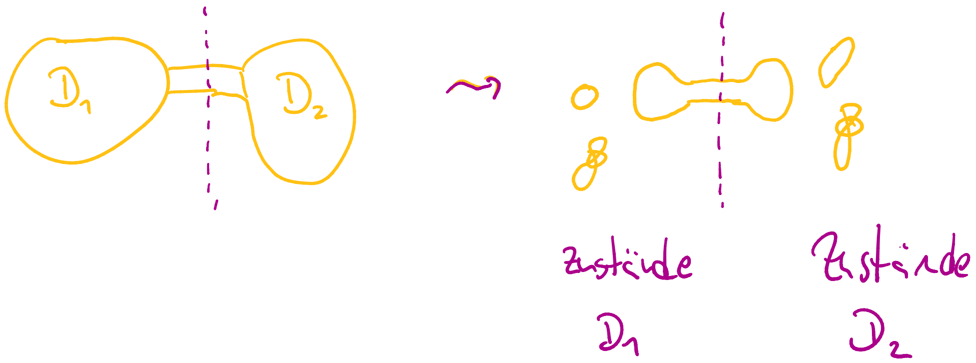
$$\dots + \sum_{\substack{s(x_1 - y_m) \\ s'_{2^m} \text{ fest}}} \dots = (*)$$

$S(x_1 - y_m)$
s'_{2^n} fest

Betrachte jede Summe, zum Beispiel die erste:

$$\sum_{\substack{s_i = S(x_1 - y_m)\\ s'_1 \text{ fest}}} A^{\alpha(s)-\beta(s)} d^{|s|-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2^n} A^{\alpha(s_i)-\beta(s_i)} A^{\alpha(s'_1)-\beta(s'_1)} \left(d^{|s_i|+|s'_1|-1-1} \right)$$

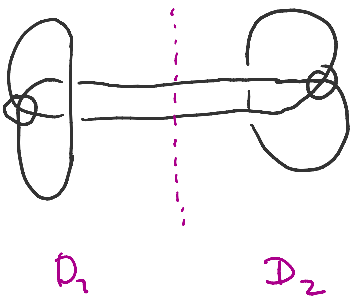


$$= A^{\alpha(s'_1)-\beta(s'_1)} d^{|s'_1|-1} \langle D_1 \rangle$$

$$= (*) = \langle D_1 \rangle \sum_{s'_i \in S_{D_2}} A^{\alpha(s'_i)-\beta(s'_i)} d^{|s'_i|-1}$$

$$= \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle \quad \square$$

Beispiel 131 Kishinos Knot ist eine zusammenhängende Summe von zwei trivialen Knoten:

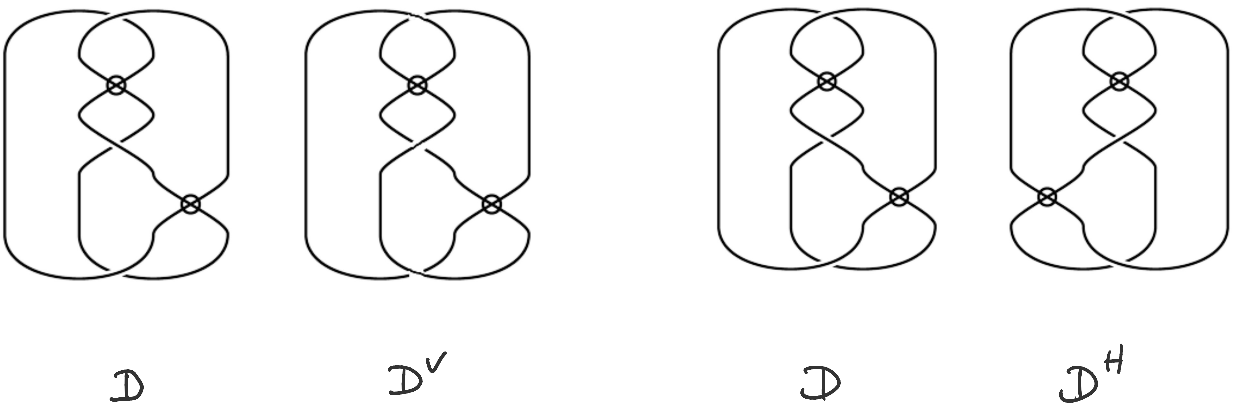


$\Rightarrow f_{D_1 \# D_2}(A) = 1 \cdot 1 = 1$ $\square$

Spiegelbilder

Definition 132 Das vertikale Spiegelbild eines Diagramms $D \in V_d$ entsteht durch Abändern der Vorzeichen. Das horizontale Spiegelbild durch spiegeln an einer Geraden die den Schatten nicht trifft.

Beispiel 133 Virtual knot 3.4.



Hier gilt: $D^V \neq D$, $D^H \neq D$, $D^H = D^V$

Beispiel 134 Für klassische Verkettungen gilt stets $D^V = D^H$. Für den Kleeblattknoten gilt $D \neq D^H$

Satz 135 Für $D \in \mathcal{V}_d$ gilt:

1) $f_D(A) = f_{D^v}(A^{-1})$ 2) $f_D(A) = f_{D^H}(A^{-1})$

Beweis Regel $\boxed{\mathrm{I}}$ von Dfn 115 besagt für $D \in \mathcal{V}_d$

ausgelassen

$\langle \times \rangle = A \langle)(\rangle + A^{-1} \langle \asymp \rangle$. Ändern wir die Vorzeichen von D erhalten wir: $\langle \times \rangle = A \langle \asymp \rangle + A^{-1} \langle)(\rangle$.

Bei der Berechnung von $\langle D_v \rangle$ und $\langle D_H \rangle$ vertauschen sich also die Rollen von A und A^{-1} bei der Berechnung von $\langle D \rangle$. Ausserdem gilt $w(D) = -w(D_v) = -w(D_H)$. Also $f_{D^v}(A) = (-A^{-3})^{w(D_v)} \langle D_v \rangle$

$= (-A^{-3})^{-w(D)} \langle D \rangle (A^{-1}) = (-(A^{-1})^{-3})^{w(D)} \langle D \rangle (A^{-1})$

$= f_D(A^{-1})$.

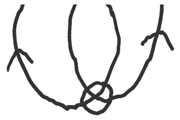
Analog rechnet man für f_{D^H} $\square$

Bemerkung 136 Das f-Polynom kann D^v und D^H nicht voneinander unterscheiden, denn $f_{D^v}(A)$

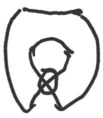
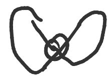
$= f_D(A^{-1}) = f_{D^H}(A)$ $\square$

Beispiel 137 Betrachte virtuellen Hopf-Link der Form

. Wir berechnen das f-Polynom

 . Wir berechnen das f-Polynom

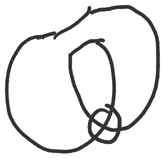
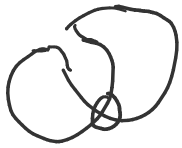
$$f_D(A) = (-A^{-3})^{\overbrace{w(D)}^{=-1}} \langle D \rangle = -A^3 \langle D \rangle = ⊛$$

$\langle D \rangle = A \langle$  $\rangle + A^{-1} \langle$  $\rangle$

$$= A + A^{-1}$$

$$⊛ = -A^3 (A + A^{-1}) = -A^4 - A^2$$

Nun mit der Zustandssumme:

$$\langle D \rangle = A^{1-0} d^{1-1} + A^{0-1} d^{1-1} = A + A^{-1}$$

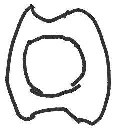
$s_1 := s(A)$ $\qquad$ $s_2 := s(B)$

$\alpha(s_1) = 1$ $\qquad$ $\alpha(s_2) = 0$

$\beta(s_1) = 0$ $\qquad$ $\beta(s_2) = 1$

Zum Beweis 125 Regel I an einem Beispiel

 $= D$

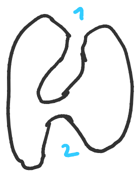


$S_D(A,A)$

A^{2-0}

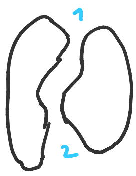
$S_D(A,B)$

A^{1-1}



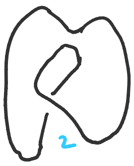
$S_D(B,A)$

A^{1-1}



$S_D(B,B)$

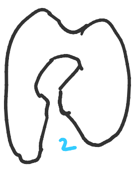
A^{0-2}



D_A

$S_{D_A}(A)$

A^{1-0}



$S_{D_A}(B)$

A^{0-1}

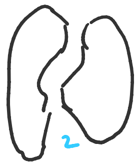
 

$D_{A^{-1}}$

A^{1-0} A^{0-1}

$S_{D_{A^{-1}}}(A)$

A^{1-0}



$S_{D_{A^{-1}}}(B)$

A^{0-1}

$$\Longrightarrow \overbrace{\text{Zustandssume}}^{=:\, ZS}(D) = A \cdot ZS(D_A) + A^{-1}\, ZS(D_{A^{-1}})$$