23.12.14

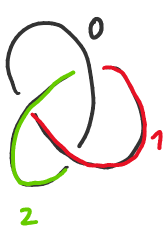
Dienstag, 19. Dezember 2023 08:21

3-Färbungen.

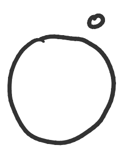
Definition 137 Eine <u>Färbung</u> eines Diagrammes $D \in V_d$ mit Farben $\{0,1,2\}$ ist eine Etikettierung jedes Bogens von D mit einer Farbe.

Ein Diagramm $D \in V_d$ heißt <u>3-gefärbt</u> wenn es eine Färbung von D gibt, in der an jeder klassischen Kreuzung genau eine oder alle Farben auftauchen. Eine Färbung mit genau einer Farbe heißt <u>trivial</u>, ansonsten <u>nicht-trivial</u>. Ein Diagramm heißt <u>3-färbbar</u>, wenn es eine nicht-triviale 3-Färbung gibt.

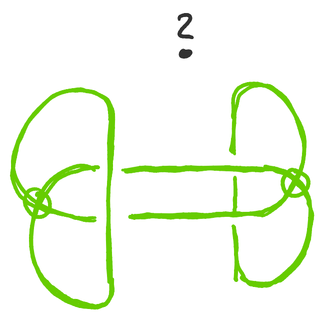
Beispiel 138



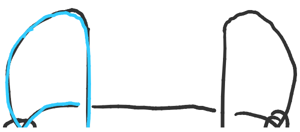
nicht-trivial

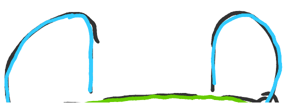


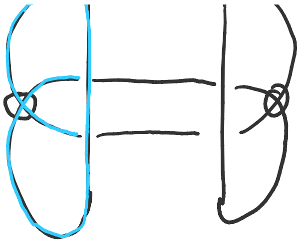
trivial



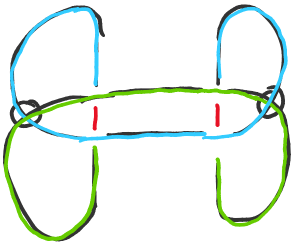
nicht 3-färbbar







nicht 3-färbbar



3-färbbar

Satz 139 3-Färbbarkeit ist eine Invariante virtueller Verkettungen.

Beweis Wir müssen die RMB prüfen. Angenommen D ist nicht-trivial 3-gefärbt. Zu zeigen ist, dass nach RMB wieder eine nicht-triviale 3-Färbung möglich ist.

RMB I 

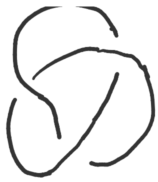
RMB II 

RMB III 

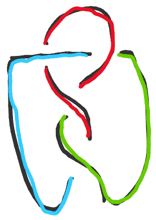
Die virtuellen RMB ändern die klassischen Kreuzungen nicht □

Korollar 140 

Korollar 140

 $\neq$ O

Beispiel 141



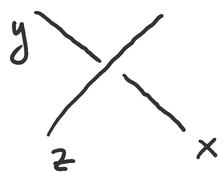
keine 3-Färbung möglich, also

$\neq$ Kleeblatt

Färbungen Modulo $n \in \mathbb{N}$

Wir betrachten $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n\}$ zusammen mit modulo-Rechnung. Also zum Beispiel im $\mathbb{Z}_4$ gilt $6 \equiv 2 \mod 4$, $-3 \equiv 1 \mod 4$ (Teilen mit Rest durch 4).

Definition 142 Ein Diagramm heißt <u>n-färbbar</u> mit Farben aus $\mathbb{Z}_n$, wenn es eine nicht-triviale Färbung der Bögen von D mit Zahlen aus $\mathbb{Z}_n$ gibt, so dass an jeder klassischen Kreuzung

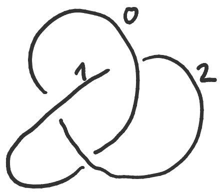


die Bedingung

$$2z \equiv x + y \mod n$$

gilt $\square$

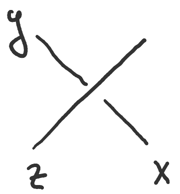
Beispiel 143



3-Färbung mit $\mathbb{Z}_3$

Korollar 144 Ist D m-färbbar, dann tauchen alle drei oder genau eine Farbe an jeder Kreuzung auf.

Beweis



wo gilt $2z = x+y \ (m)$

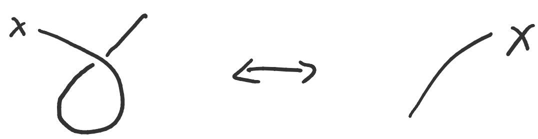
Angenommen genau zwei Farben tauchen auf: $x=y \Rightarrow 2z \equiv 2x \ (m) \Rightarrow z \equiv x$

$y = z \Rightarrow 2z \equiv x+z \ (m) \Rightarrow z \equiv x \ (m)$. Also taucht jeweils genau eine Farbe auf □

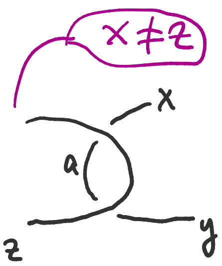
Satz 145 m-Färbbarkeit ist eine Invariante virtueller Verkettungen.

Beweis Wir müssen wieder nur die klassische RMB prüfen:

<u>RMB I</u>



<u>RMB II</u> $\boxed{2}$

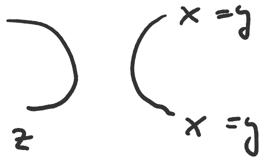


Dabei gilt, weil es sich um eine nicht-triviale Färbung handelt.

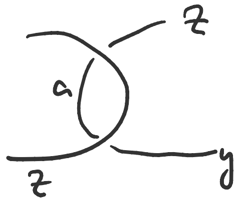
nicht-triviale Färbung handelt.

$2z \equiv a+y \ (n)$, $2z \equiv a+x \ (n) \Rightarrow a+y \equiv a+x \ (n)$

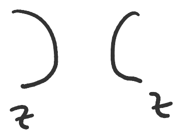
$\Rightarrow x \equiv y \ (n)$

Also ist 

auch $\boxed{\text{nicht triviale}}$ n-Färbung

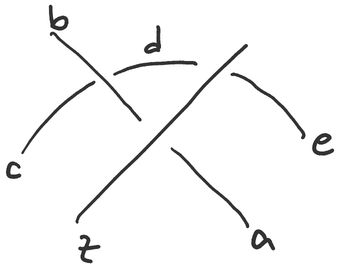
$\boxed{1}$ $x = z \Rightarrow$ 

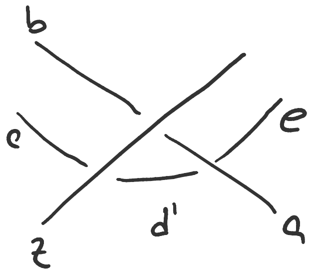
Kor $a = z \Rightarrow y = z$

$\Rightarrow$ 

nicht-triviale Färbung

<u>RMB III</u>



$\longleftrightarrow$


1) $2z \equiv b+a \ (n)$

2) $2b \equiv c+d \ (n)$

3) $2z \equiv d+e \ (n)$

4) $2z \equiv c+d' \ (n)$

5) $2z \equiv b+a \ (n)$

6) $2a \equiv d'+e \ (n)$

Aus 4) und 6) ergibt sich $d' \equiv 2z - c$ und $d' \equiv 2a - e$. Wir zeigen also $2z - c \equiv 2a - e$, denn dann ist d' wählbar so dass 4) 5) 6) erfüllt sind. Aus 1) und 3): $b + a \equiv d + e \Rightarrow a - e = d - b$

sind. Aus 1) und 3): $b + a \equiv d + e \Rightarrow a - e \equiv d - b$

Aus 2): $b - c \equiv d - b$

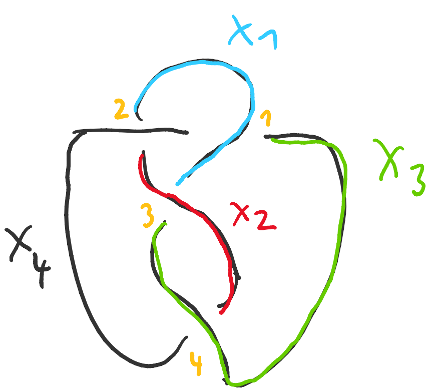
$$\Rightarrow a - e \equiv b - c \overset{+a}{\Rightarrow} 2a - e \equiv a + b - c \equiv$$

$$\overset{1)}{\equiv} 2z - c$$

Natürlich gilt: falls das linke Diagramm nicht-trivial gefärbt ist, dann auch das Rechte (und umgekehrt). $\square$

Korollar 146 Um eine n-Färbung zu erhalten muss man ein LGS modulo n mit # Bögen Variablen und # Kreuzungen Gleichungen lösen.

Beispiel 147 Achterknoten



$$\begin{array}{ll} 1 & 2x_1 \equiv x_4 + x_3 \ (n) \\ 2 & 2x_4 \equiv x_1 + x_2 \ (n) \\ 3 & 2x_2 \equiv x_1 + x_3 \ (n) \\ 4 & 2x_3 \equiv x_2 + x_4 \ (n) \end{array}$$

liefert Koeff matrix

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{matrix}$$

Betrachte Modulo 3 : $\begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

$$\Rightarrow x_3 \equiv -2x_4 \equiv x_4 \Rightarrow x_2 \equiv -2x_3 \equiv x_3 \overset{\text{mod } 3}{\Rightarrow} x_1 \equiv x_2$$

$$\Rightarrow x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4$$ nicht-triviale

$\Rightarrow$ Es gibt keine 3-Färbung

Betrachte Modulo 4

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x_1 \equiv 5x_4 \equiv x_4, \quad x_2 \equiv 5x_4 \equiv x_4, \quad x_3 \equiv -3x_4 \equiv x_4$$

$\Rightarrow x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \Rightarrow$ nur triviale 4-Färbung möglich

Färbung möglich

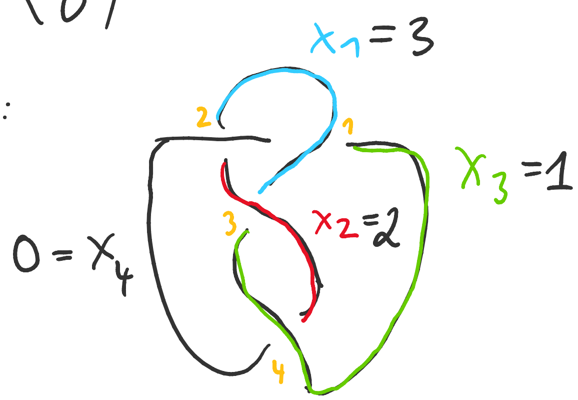
Betrachte Modulo 5

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x_3 =: \lambda,\ x_4 =: \mu \Rightarrow x_1 = 3\lambda + 3\mu,\ x_2 = 2\lambda + 4\mu$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda + 3\mu \\ 2\lambda + 4\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}_5$$

Zum Beispiel $\lambda = 1$ liefert:



oder $\lambda = 2$ liefert

$x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0$

eine <u>andere</u> Färbung Modulo 5!