

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ☺ Übung 02

Abgabe: bis Freitag, den 02.05.2025 um 11 Uhr

Hausaufgabe 2.1 [n -facher Münzwurf] (6 Punkte)

Vorgegeben sei eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine faire Münze, die auf einer Seite Kopf (K) und auf der anderen Seite Zahl (Z) zeigt. Nun wird diese Münze n -mal geworfen. Nach jedem Wurf notieren wir das Ergebnis, also K oder Z, das die Münze zeigt.

- a Modellieren Sie dieses Zufallsexperiment, indem Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ angeben. Begründen Sie Ihre Wahl.
- b Definieren Sie formal die folgenden Ereignisse und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten:
 - i Für $k \in \mathbb{N}$ sei A_k das Ereignis, dass im k -ten Wurf das erste Mal Kopf erscheint.
 - ii Für $k \in \mathbb{N}$ sei B_k das Ereignis, dass genau k -mal Mal Kopf erscheint.
- c Bei diesem Experiment sei ein *Run* eine zusammenhängende Folge gleicher Ergebnisse von Würfeln von maximaler Länge. Zum Beispiel enthält die Folge

$KKKZZKZZZKKZ$

genau 6 Runs, die man wie folgt mit Klammern veranschaulichen kann

$(KKK)(ZZ)(K)(ZZZ)(KK)(Z).$

Berechnen Sie für $n = 10$ die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 Runs aus Kopf und 2 Runs aus Zahl auftauchen.

Hausaufgabe 2.2 [Spezielle Wahrscheinlichkeiten] (6 Punkte)

- a Seien $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $D, E \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(D) = \frac{8}{13}$ und $\mathbb{P}(E) = \frac{6}{13}$. Welche der folgenden Mengen können die Wahrscheinlichkeit 0 besitzen? Begründen Sie Ihre Antwort. Dazu geben Sie in dem Fall, dass die Wahrscheinlichkeit 0 möglich ist, ein Beispiel an. Andernfalls beweisen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit 0 nicht möglich ist.

- i) $D \cap E^c$, ii) $D^c \setminus E$.

b Seien $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{4}{5}$.

i Finden Sie eine Zahl $c \in (0, 1)$, für welche Sie beweisen können, dass

$$\mathbb{P}(A \setminus B) \leq c$$

gilt.

ii Geben Sie ein Beispiel an, das die obigen Voraussetzungen erfüllt und für das

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = c$$

gilt.

Hausaufgabe 2.3 [W-Maß mit Dichte] (6 Punkte)

Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3|x|}{C} & \text{für } x \in [-1, 0], \\ \frac{5x^2}{C} & \text{für } x \in [1, 5], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Außerdem seien $A_n := [1, 2 - \frac{1}{n}] \subseteq \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ und

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

a Bestimmen Sie C so, dass f eine Dichte ist.

b Zeigen Sie, dass $A = [1, 2)$ gilt.

c Es sei $\mathbb{P}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit der Dichte f . Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$$

gilt.

d Zeigen Sie die Aussage aus **c**, also $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$, direkt anhand der Rechenregeln für Wahrscheinlichkeitsmaße, das heißt, ohne die Dichte f zu verwenden.