

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ☺ Übung 03

Abgabe: bis Freitag, den 09.05.2025 um 11 Uhr

Hausaufgabe 3.1 [Zwei Karten ziehen] (6 Punkte)

Wir betrachten ein Kartenspiel, welches durch den folgenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ beschrieben wird. Der Ereignisraum ist definiert durch

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &:= \{7, 8, 9, 10\}, & \mathcal{B} &:= \{B, D, K, A\}, & \mathcal{F} &= \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}, \\ \Omega &:= \left\{ ((x_1, F_1), (x_2, F_2)) : x_i \in \mathcal{Z} \cup \mathcal{B}, F_i \in \mathcal{F} \text{ für } i \in \{1, 2\}, (x_1, F_1) \neq (x_2, F_2) \right\}.\end{aligned}$$

Für ein Elementarereignis $((x_1, F_1), (x_2, F_2)) \in \Omega$ schreiben wir im Folgenden auch einfach kurz ω .

Bezug. Für beliebige Paare von 2-Tupeln $((x_1, F_1), (x_2, F_2))$ aus Ω verstehen wir (x_1, F_1) als die erste gezogene Karte. Dabei repräsentiert x_1 das *Bild*, d.h. entweder Bube B , Dame D , König K oder Ass A oder die Zahl aus $\mathcal{Z}$. Mit F_1 wird die *Farbe* dargestellt, d.h. Pik mit $\spadesuit$, Herz mit $\heartsuit$, Karo mit $\diamondsuit$, Kreuz mit $\clubsuit$ identifiziert. Die als zweites gezogene Karte (x_2, F_2) verstehen wir analog.

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion wählen wir die Gleichverteilung auf Ω , also

$$\mu : \Omega \rightarrow [0, 1], \quad \mu(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{32 \cdot 31} = \frac{1}{992} \quad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

a Begründen Sie, warum die Wahl der Gleichverteilung sinnvoll ist.

b Geben Sie die folgenden Ereignisse A , B , C als Teilmengen von Ω an:

A : Die erste aufgedeckte Karte ist ein As.

B : Die zweite aufgedeckte Karte ist eine Bildkarte.

C : Keine der beiden aufgedeckten Karten hat die Farbe Karo.

c Verwenden Sie das Ein- und Ausschlussprinzip, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass mindestens eines dieser Ereignisse eintritt. Bestimmen Sie zunächst alle für das Ein- und Ausschlussprinzip notwendigen Wahrscheinlichkeiten.

Hausaufgabe 3.2 [Pflanzen wässern] (6 Punkte)

Sie bitten Ihre Mitbewohnerin, während Ihrer Urlaubsreise Ihre Pflanzen zu gießen. Falls sie gegossen werden, verwelken die Pflanzen während Ihrer Abwesenheit nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 3%. Falls sie nicht gegossen werden, steigt diese Wahrscheinlichkeit jedoch auf 98%. Aus Erfahrung wissen Sie, dass Ihre Mitbewohnerin das Gießen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{10}$ vergisst.

- a** Geben Sie einen geeigneten Ereignisraum Ω an, um **b** und **c** zu bearbeiten.
- b** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre Pflanzen bei Ihrer Rückkehr nicht verwelkt sind?
- c** Sie kommen zurück und ihre Pflanzen sind nicht verwelkt. Wie wahrscheinlich ist es, dass die Pflanzen gegossen worden sind?
- d** Geben Sie mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten aus der Aufgabenstellung sowie den Wahrscheinlichkeiten aus den Teilen **b** und **c** die Wahrscheinlichkeitsfunktion μ an.

Hausaufgabe 3.3 [Totale Wahrscheinlichkeit und Bayes-Formel] (6 Punkte)

Es seien (Ω, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B_1, B_2, \dots \subset \Omega$ mit $\bigsqcup_j B_j = \Omega$. Außerdem sei $A \subset \Omega$ vorgelegt.

- a** Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_j \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j).$$

- b** Es gelte $\mathbb{P}(A) > 0$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)} \quad \text{für alle } i.$$

Hinweis: Aufgabenteil **a** ist die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit. Sie können sie analog zum Beweis des einfachsten Falles aus der Vorlesung beweisen. Teil **b** ist die allgemeine Version des Satzes von Bayes. Sie können ihn mit Hilfe von **a** aus der einfachen Version des Satzes von Bayes folgern (welche Sie hier ohne erneuten Beweis benutzen dürfen).