

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ☺ Übung 04

Abgabe: bis Freitag, den 16.05.2025 um 11 Uhr

Hausaufgabe 4.1 [Verteilungen von Zufallsvariablen] (6 Punkte)

Ein Glücksrad mit drei gleichgroßen Feldern, die mit $-1, 0$ und 1 beschriftet sind, wird zweimal nacheinander gedreht. Nach jeder Drehung wird das Ergebnis notiert. Die Zufallsvariable X sei das Maximum, die Zufallsvariable Y das Minimum und die Zufallsvariable Z das Produkt der beiden Ergebnisse.

- a Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an, der es erlaubt, die folgenden Aufgabenteile zu bearbeiten.
- b Definieren Sie auf dem von Ihnen gewählten Wahrscheinlichkeitsraum die Zufallsvariablen X , Y und Z als Abbildungen (geben Sie also an: Definitionsbereich, Wertebereich, Zuordnungsvorschrift).
- c Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X , Y und Z indem Sie die Werte der gemeinsamen Verteilung $\mu_{(X,Y,Z)}$ angeben.
- d Bestimmen Sie die Randverteilung μ_Z .
- e Geben Sie die Verteilungsfunktion von Z als Abbildung an (also: Definitionsbereich, Wertebereich, Zuordnungsvorschrift) und skizzieren Sie den Funktionsgraphen in einem geeigneten Koordinatensystem.

Hausaufgabe 4.2 [Verteilungsfunktionen mit Dichten] (6 Punkte)

- a Die Dichte $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2}{3} & : x \in [0, 1] \\ \frac{2}{3}(2-x) & : x \in (1, 2] \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} .$$

- i Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F zur Dichte f .
 - ii Skizzieren Sie die Graphen von f und F in einem geeigneten gemeinsamen Koordinatensystem.
- b Vorgelegt sei eine Menge

$$\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < 1\},$$

eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} c \cdot x \cdot y & : (x, y) \in \Delta \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

- i Skizzieren Sie Δ in einem x - y -Koordinatensystem.
- ii Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass f eine Dichte ist.
Hinweis für den nächsten Aufgabenteil iii: das Ergebnis ist $c = 24$.
- iii Es sei (X, Y) eine $\mathbb{R}^2$ -wertige ZV mit Dichte f . Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X , indem Sie $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ berechnen.

Hausaufgabe 4.3 [Warten beim Würfeln] (6 Punkte)

Sei X eine mit Parameter $p \in (0, 1)$ geometrisch verteilte Zufallsvariable.

- a Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- b Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(X \geq n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X \geq k) \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N}.$$

Wir werfen zwei Würfel hintereinander. Dieses Experiment wiederholen wir so oft bis das Ereignis E eintritt, dass der zweite Wurf eine größere Zahl als der erste Wurf zeigt. Die Zufallsvariable Y gebe an, wie oft wir die beiden Würfel werfen müssen bis dieses Ereignis eintritt.

- c Welche Verteilung hat die Zufallsvariable Y ? Bestimmen Sie, falls erforderlich, auch die Parameter der Verteilung von Y .
- d Wir haben bereits dreimal beide Würfel geworfen, ohne dass das Ereignis E aus c eingetreten ist. Wie gross ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass wir die Würfel noch mindestens weitere zweimal werfen müssen, bis das Ereignis E eintritt?