

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ☺ Übung 06

Abgabe: bis Freitag, den 30.05.2025 um 11 Uhr

Hausaufgabe 6.1 [Gemeinsame Dichten I] (6 Punkte)

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$, die gegeben ist durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp(-x) \exp(-\frac{1}{2}y) & \text{falls } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a Weisen Sie nach, dass f tatsächlich eine Dichte ist.
- b Bestimmen Sie Randdichten f_X und f_Y der Dichte f , wobei f_X eine Dichte für X und f_Y eine Dichte für Y sei.
- c Sind X und Y unabhängig?
- e Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > Y)$.

Hinweis: Bestimmen Sie mit Hilfe einer Skizze zunächst den Integrationsbereich D , so dass $x > y \Leftrightarrow (x, y) \in D$ gilt.

Hausaufgabe 6.2 [Gemeinsame Dichten II] (6 Punkte)

Es sei (X, Y) uniformverteilt auf der Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, x \leq y \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}.$$

- a Skizzieren Sie die Menge A .
- b Berechnen Sie die Dichten von X und Y .
- c Berechnen Sie die Verteilungsfunktionen von X und Y .
- d Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind, indem Sie
 - i die Dichtefunktionen
 - ii die Verteilungsfunktionenverwenden.

Hausaufgabe 6.3 [Wartezeit] (6 Punkte)

Frau Fleißig fährt jeden Tag mit dem Bus zur Universität. Wir wollen annehmen, daß die Zeit X in Minuten, die sie an der Haltestelle warten muß, exponentialverteilt ist mit Parameter $1/10$.

- a** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Frau Fleißig länger als 20 Minuten warten muß?
- b** Wenn Frau Fleißig schon mindestens 20 Minuten gewartet hat, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie weitere 20 Minuten warten muß?
- c** Die Fahrzeit des Busses sei ebenfalls exponentialverteilt mit Parameter $1/10$. Die Fahrzeit sei unabhängig von der Zeit, die Frau Fleißig bereits an der Haltestelle gewartet hat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß Frau Fleißig insgesamt nicht länger als 30 Minuten benötigt von ihrem Eintreffen an der Haltestelle bis zur Ankunft an der Universität.
- d** Verallgemeinern Sie Ihre Rechnung aus **c** um die Dichte der Summe zweier unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen mit gleichem Parameter zu berechnen.