Universität Bielefeld
Prof. Dr. Barbara Gentz
Dr. Jason Uhing
Sommersemester 2025

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ☺ Übung 07

Abgabe: bis Freitag, den 06.06.2025 um 11 Uhr

Hausaufgabe 7.1 [Murmeln] *(6 Punkte)*
Sie haben drei Murmeln. Ihnen wird das folgende Spiel vorgeschlagen. Es werden drei faire dreiseitige Würfel mit den Seiten 1, 2 und 3 geworfen. Zeigen alle Würfel die Augenzahl i, so gewinnen Sie i^2 Murmeln für $i \in \{1, 2, 3\}$. Andernfalls verlieren Sie die Anzahl Murmeln in Höhe des Maximums der gefallenen Augenzahlen.

a Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an, um die folgenden Aufgabenteile bearbeiten zu können.

b **i** Formulieren Sie Ereignisse $A_1, A_2, A_3 \subseteq \Omega$, die den jeweiligen Gewinn von Murmeln beschreiben.

ii Definieren Sie eine Zufallsvariable M, die das Maximum der Augenzahlen beschreibt.

iii Definieren Sie eine Zufallsvariable G , die Ihren Gewinn an Murmeln beschreibt. Verwenden Sie dazu die Aufgabenteile **i** und **ii**.

iv Definieren Sie eine Zufallsvariable X, die Ihre Anzahl an Murmeln nach dem Spiel angibt.

c Berechnen Sie den Erwartungswert von X mit Hilfe von Satz (E) aus der Vorlesung vom 30. Mai 2025.

Hausaufgabe 7.2 [Briefträger] *(6 Punkte)*
Ein Briefträger liefert Wahlbenachrichtigungen aus. Am Ende seiner Tour befindet sich ein Hochhaus, welches $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, verschiedene Briefkästen besitzt. Wir gehen vereinfachend davon aus, dass jede*r der n Bewohner*innen einen eigenen Briefkasten hat. Der Briefträger entscheidet sich kurzer Hand, seine Arbeitszeit zu verkürzen, indem er die zugehörigen n Wahlbenachrichtigungen vollkommen zufällig in die n Briefkästen verteilt, so dass in jedem Briefkasten genau eine zufällig gewählte Wahlbenachrichtigung gelegt wird.

a Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, um die folgenden Aufgabenteile bearbeiten zu können.

Hinweis: $\#\Omega = n!$

b Definieren Sie Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ wie folgt: Für $i \in \{1, \dots, n\}$ nehme X_i den Wert 1 an, falls die i-te Wahlbenachrichtigung richtig zugestellt wurde und 0, falls diese falsch zugestellt wurde. Definieren Sie auch eine Zufallsvariable S_n, welche die Anzahl richtig zugestellter Wahlbenachrichtigungen angibt.

Hinweis: Gesucht sind Zuordnungsvorschriften $X_i(\omega) := \dots$ und $S_n(\omega) := \dots$, die den Fließtext durch einen mathematischen Ausdruck ersetzen.

c Zeigen Sie:

i $\mathbb{E}[S_n] = 1$,

ii $\mathbb{E}[X_i X_j] = \frac{1}{n(n-1)}$ für $i \neq j$ und

iii $\mathbb{E}[S_n^2] = 2$.

Hausaufgabe 7.3 [Erwartungswert spezieller Maxima] *(6 Punkte)*
Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ bezeichne F_i die Verteilungsfunktion von X_i. Außerdem sei

$$M := \max_{i \in \{1,\dots,n\}} X_i$$

das Maximum der X_i.

a Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(M \leq x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x).$$

b Die X_i seien jeweils exponentialverteilt mit Parameter α. Berechnen Sie $\mathbb{E}[M]$.

c Die X_i seien jeweils uniformverteilt auf $[0, n]$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[M]$.