Universität Bielefeld
Prof. Dr. Barbara Gentz
Dr. Jason Uhing
Sommersemester 2025

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ☺ Übung 08

Abgabe: bis Freitag, den 13.06.2025 um 11 Uhr

Hausaufgabe 8.1 [Gewinnspiel] *(6 Punkte)*
In einer Urne befinden sich fünf Kugeln, die mit den Ziffern 1 bis 5 beschriftet sind. Es werden zwei Kugeln gleichzeitig gezogen. Sind beide Ziffern ungerade, erhalten Sie den Betrag der Differenz in Talern ausgezahlt. Sind beide Ziffern gerade, müssen Sie den Betrag der Differenz an Talern einzahlen. In allen andern Fällen geschieht nichts.

a Geben Sie für dieses Experiment einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an und begründen Sie Ihre Wahl. Definieren Sie mit Hilfe von Indikatorfunktionen eine Zufallsvariable $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ als Differenz der obigen Zahlungen. Diese Zufallsvariable beschreibt Ihren Ertrag in diesem Experiment.

Nun werden die Kugeln in die Urne zurückgelegt und dieses Experiment n-mal, $n \in \mathbb{N}$, nacheinander durchgeführt.

b Geben Sie für dieses Experiment einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_n, \mathbb{P}_n)$ an. Definieren Sie mit Hilfe von Teil **a** eine Zufallsvariable $S_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$, die Ihre Erträge in den Spielrunden aufsummiert.

c Nun müssen Sie einen Einsatz von $x \in \mathbb{R}$ Talern in jeder Spielrunde setzen. Definieren Sie eine Zufallsvariable G_n, die zusammen mit den Erträgen Ihren Gewinn beschreibt.

d Geben Sie eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass $G_n > 0$ ist. Verwenden Sie die Tschebyscheff-Ungleichung aus der Vorlesung: wie müssen Sie dort das h wählen? Begründen Sie jedes Gleichheits- und Ungleichheitszeichen in Ihrer Rechnung.

e Berechnen Sie die in Ihrem Ergebnis auftretenden Erwartungsgwerte und Varianzen. Begründen Sie jeden Rechenschritt mit den (Teil-)Aussagen der Sätze (E) und (V) der Vorlesung.

Hausaufgabe 8.2 [Momente spezieller Verteilungen] *(6 Punkte)*

a Es sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte aus Hausaufgabe 2.3. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von X existiert und berechnen Sie die Varianz von X.

b Wir betrachten eine Zufallsvariable Y mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von Y nicht existiert.

Hausaufgabe 8.3 [Augensumme beim Würfeln] *(6 Punkte)*
Drei faire Würfel werden gleichzeitig und unabhängig so oft nacheinander geworfen bis die Augensumme das erste Mal gleich 5 ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Augensumme der drei Würfel bei einmaligem gleichzeitigen Wurf gleich 5 ist, beträgt $1/36$. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

Die Zufallsvariable τ beschreibe die Nummer des Wurfs, bei dem die Augensumme zum ersten Mal gleich 5 ist.

a Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an für dieses Zufallsexperiment, und definieren Sie τ formal als Abbildung auf dem zugehörigen Ereignisraum.

b Welche Verteilung hat die Zufallsvariable τ? Geben Sie, falls erforderlich, die Parameter der Verteilung von τ an.

c Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von τ.

d Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, daß τ einen Wert annimmt, der mindestens dem k-fachen Erwartungswert von τ entspricht.

e Wie oft müssen wir mindestens das Werfen der drei Würfel durchführen, damit wir mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal die Augensumme 5 erzielen? Verwenden Sie die Tschebyscheffsche Ungleichung.