

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ☺ Übung 09

Abgabe: bis Freitag, den 20.06.2025 um 11 Uhr

Hausaufgabe 9.1 [Gummibären] (6 Punkte)

Eine Firma produziert Gummibären in vier verschiedenen Farben. Eine Studie aus der Marktforschung hat ergeben, dass Rot die beliebteste Farbe für Gummibären ist. Daher sind $\frac{2}{5}$ der hergestellten Gummibären rot. Die Abfüllung ist so eingestellt, dass die Gummibären zufällig in Tüten von 150 Stück abgefüllt werden. Wir haben eine dieser Tüten gekauft.

- a Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ an, um die folgenden Aufgabenteile bearbeiten zu können. Diskutieren Sie insbesondere, welche Annahmen gemacht werden müssen, um Ihr Modell zu rechtfertigen.
- b Definieren Sie eine Zufallsvariable S_{150} , welche angibt, wie viele rote Gummibären in der Tüte sind. Welcher Verteilung folgt die Zufallsvariable S_{150} ? Geben Sie gegebenenfalls die zugehörigen Parameter an. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von S_{150} .
- c Berechnen Sie näherungsweise (mit und ohne Stetigkeitskorrektur) die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen (einschließlich) 48 und (einschließlich) 73 rote Gummibären in der Tüte enthalten sind. Bestimmen Sie auch das exakte Ergebnis.
- d Berechnen Sie näherungsweise (mit und ohne Stetigkeitskorrektur) auch die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen (einschließlich) 52 und (einschließlich) 70 rote Gummibären in der Tüte enthalten sind. Bestimmen Sie auch das exakte Ergebnis. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Ergebnisse aus c) und d) miteinander vergleichen?

Hausaufgabe 9.2 [Relative Häufigkeit beim Münzwurf] (6 Punkte)

Wir werfen n -mal eine faire Münze. Dabei zähle die Zufallsvariable S_n wie oft „Zahl“ geworfen wurde. Wie groß muss n mindestens sein, so dass

$$\mathbb{P}\left(-\frac{1}{20} < \frac{1}{n}S_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{20}\right) \geq \frac{19}{20}$$

gilt?

- a Geben Sie für dieses Experiment einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ und die Verteilung von S_n an. Bearbeiten Sie damit die folgenden Aufgabenteile. Diskutieren Sie außerdem, welche Annahmen Sie machen müssen, um die Wahl von $(\Omega, \mathbb{P})$ zu rechtfertigen.

- b** Verwenden Sie die Tschebyscheff-Ungleichung, um die in der Aufgabe beschriebene Wahrscheinlichkeit für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ abzuschätzen. Bestimmen Sie anschließend anhand Ihrer Abschätzung eine untere Schranke für diejenigen $n \in \mathbb{N}$, für die die gesuchte Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{19}{20}$ beträgt.
- c** Approximieren Sie die in der Aufgabe beschriebene Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des Satzes von *de Moivre-Laplace* (ohne Stetigkeitskorrektur) für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie anschließend anhand Ihrer Näherung eine untere Schranke für diejenigen $n \in \mathbb{N}$, für die die gesuchte Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{19}{20}$ beträgt.

Hinweis: Sie dürfen in dieser Aufgabe

$$\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{10} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{10}\right)$$

verwenden.

Hausaufgabe 9.3 [Buchungen] (6 Punkte)

Wir betrachten ein Hotel mit 200 Zimmern. Erfahrungsgemäß wird eine Reservierung mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% storniert.

- a** Es seien alle Zimmer reserviert, und es sei Z die zufällige Anzahl der Zimmer, die nicht vor der Anreise storniert werden. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Z \leq 185)$ sowohl
- 1** exakt als auch
 - 2** näherungsweise mit dem Satz von *de Moivre-Laplace*. Verwenden Sie die Stetigkeitskorrektur.
- b** Um die Auslastung des Hotels zu erhöhen, sollen in Zukunft auch mehr als 200 Zimmerreservierungen vorgenommen werden dürfen. Allerdings soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Hotel überbelegt ist, maximal 1% betragen. Bestimmen Sie die Anzahl der zulässigen Reservierungen sowohl
- 1** exakt als auch
 - 2** näherungsweise mit dem Satz von *de Moivre-Laplace*. Verwenden Sie die Stetigkeitskorrektur.