

Universität Bielefeld  
Prof. Dr. Barbara Gentz  
Dr. Jason Uhing  
Sommersemester 2025

## Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ☺ Übung 10

Abgabe: bis Freitag, den 27.06.2025 um 11 Uhr

### Hausaufgabe 10.1 [Stäbe brechen] (6 Punkte)

Ein Stab von 60cm Länge werde von einer Person in zwei Teile gebrochen. Die Bruchstelle sei uniform verteilt auf dem Intervall  $[0, 60]$ .

Nun brechen 35 Personen gleichzeitig jede für sich einen Stab wie oben beschrieben.

- a** Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, der es erlaubt, die folgenden Aufgabenteile zu bearbeiten.

Diskutieren Sie, welche Annahmen Sie machen müssen, um Ihre Wahl des Wahrscheinlichkeitsraums zu rechtfertigen.

- b** Definieren Sie für jedes  $i \in \{1, \dots, 35\}$  eine Zufallsvariable  $X_i$ , die die Bruchstelle angibt. Geben Sie die Verteilungsfunktion  $F_i$  von  $X_i$  an (Definitionsbereich, Bildbereich, Zuordnungsvorschrift).

- c** Definieren Sie eine Zufallsvariable  $Z_{35}$  (Definitionsbereich, Bildbereich, Zuordnungsvorschrift), die den Mittelwert der Bruchstellen angibt.

- d** Berechnen Sie mit Satz (ZGWS) der Vorlesung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, daß der Mittelwert aus **c** größer 30 und kleiner gleich 40 ist.

### Hausaufgabe 10.2 [Absturz beim Login] (6 Punkte)

Aufgrund eines Programmfehlers eines Servers führt einer von 500 Login-Versuchen zu einem Absturz.

- a** Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, der es erlaubt, die folgenden Aufgabenteile zu bearbeiten.

Diskutieren Sie, welche Annahmen Sie machen müssen, um Ihre Wahl des Wahrscheinlichkeitsraums zu rechtfertigen.

- b** Berechnen Sie für jedes  $k \in \{100, 1600, 4000\}$  die Wahrscheinlichkeit, daß unter  $k$  Einwahlversuchen mindestens drei auftauchen, die zu einem Absturz führen.

Führen Sie die Rechnung auf folgende drei Arten durch:

- 1 mit Hilfe der Poisson-Approximation,
- 2 mit Hilfe der Bemerkung in Abschnitt 9.4 der Vorlesung und

**3** durch eine exakte Rechnung.

**c** Welche der Approximationen ist besser? Warum?

**Hausaufgabe 10.3** [Druckfehler] (*6 Punkte*)

Ein Buch habe 1000 Seiten und bestehe aus 50 Kapiteln zu je 20 Seiten. Außerdem gibt es in dem Buch 40 Druckfehler. Wir nehmen an, dass die Druckfehler unabhängig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf den Seiten auftreten. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Druckfehler auf einer Seite auftritt sei also  $1/1000$ . Um die Druckfehler zu beseitigen, wird das Buch von einem Lektor geprüft. Leider findet dieser keinen einzigen Fehler, sondern erzeugt selbst Druckfehler. In den ersten 10 Kapiteln je Kapitel einen, in den Kapiteln 11 bis 40 jeweils 3 und in den Kapiteln 41 bis 50 sogar 5 Fehler je Kapitel. Wir wählen nun zufällig ein Kapitel.

- a** Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, um die folgenden Aufgabenteile bearbeiten zu können. Diskutieren Sie insbesondere, welche Annahmen Sie treffen müssen.
- b** Definieren Sie eine Zufallsvariable  $F$ , die angibt, wie viele Druckfehler insgesamt in dem ausgewählten Kapitel auftreten.
- c** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in dem zufällig gewählten Kapitel 10 Druckfehler auftauchen. Verwenden Sie dazu eine geeignete Approximation.