

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ☺ Übung 11

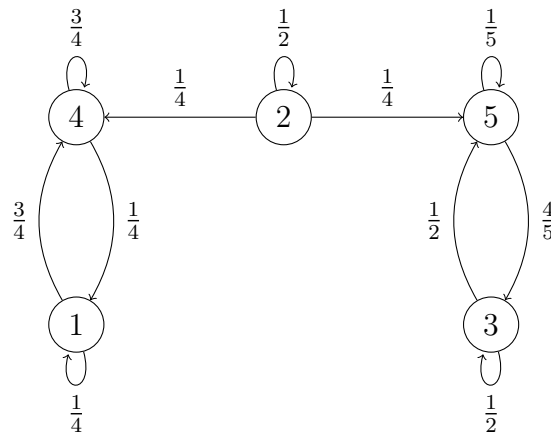
Abgabe: bis Freitag, den 04.07.2025 um 11 Uhr

Hausaufgabe 11.1 [Markoffkette I] (6 Punkte)

Auf dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sei eine Markoffkette $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit Startverteilung

$$\nu = (0, \tfrac{1}{2}, 0, 0, \tfrac{1}{2})$$

gegeben. Die Übergangswahrscheinlichkeiten können Sie dem folgenden Graphen entnehmen:



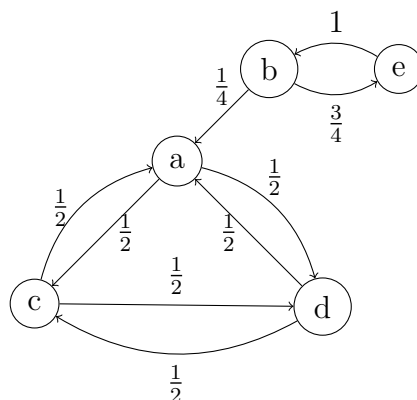
- a Bestimmen Sie die zugehörige Matrix P der Übergangswahrscheinlichkeiten und zeigen Sie, dass P eine stochastische Matrix ist.
- b Bestimmen Sie die Verteilung μ_{X_1} von X_1 .
- c Berechnen Sie $\mathbb{P}(X_1 = 4, X_3 = 4)$ und $\mathbb{P}(X_2 = 3)$.
- d Untersuchen Sie, ob eine eindeutige Gleichgewichtsverteilung existiert. Sollte die Gleichgewichtsverteilung nicht eindeutig sein, so geben Sie in diesem Fall *alle* Gleichgewichtsverteilungen an.

Hausaufgabe 11.2 [Markoffkette II] (6 Punkte)

Auf dem Zustandsraum $S = \{a, b, c, d, e\}$ sei eine Markoffkette $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit Startverteilung

$$\mu(a) = \mu(b) = \mu(c) = \mu(d) = \mu(e) = \frac{1}{5}$$

gegeben. Die Übergangswahrscheinlichkeiten können Sie dem folgenden Graphen entnehmen:



- Bestimmen Sie die zugehörige Matrix P der Übergangswahrscheinlichkeiten.
- Berechnen Sie die Gleichgewichtsverteilung der Markoffkette.
- Bestimmen Sie die Verteilungen μ_{X_1} und μ_{X_2} von X_1 und X_2 .
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

$$\{X_1 = a, X_2 = c\} \quad \text{und} \quad \{X_3 = b\}.$$

Hausaufgabe 11.3 [Käfer] (6 Punkte)

Zur Zeit $t = 0$ sitzt ein Käfer vor einer Treppe mit drei Stufen. Wir numerieren die Treppenstufen von 1 bis 3 durch und bezeichnen den Treppenabsatz vor der Stufe, auf der der Käfer anfänglich sitzt, mit 0. Sitzt der Käfer auf einer der Stufen $i \in \{1, 2\}$, so erreicht er die nächste Stufe $i + 1$ mit Wahrscheinlichkeit $p_i \in (0, 1)$. Für $i \in \{1, 2\}$ fällt der Käfer mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_i$ von Stufe i ganz zurück auf den Treppenabsatz 0. Auf dem Treppenabsatz 0 ist der Käfer grundsätzlich sehr motiviert und schafft es mit Wahrscheinlichkeit 1 auf die erste Stufe. Hat der Käfer die dritte Stufe erreicht, bleibt er dort sitzen.

- Veranschaulichen Sie die Bewegung des Käfers mittels eines geeigneten Graphen. Liegt eine Markoffkette vor? Falls ja, geben Sie einen Zustandsraum S , die Matrix P der Übergangswahrscheinlichkeiten und die zugehörige Startverteilung μ an.

- b** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Käfer nach genau sechs Schritten erstmals die dritte Stufe erreicht.
- c** Untersuchen Sie, ob es für diese Markoffkette eine eindeutige Gleichgewichtsverteilung existiert. Falls es mehr als eine gibt, so bestimmen Sie alle Gleichgewichtsverteilungen.