Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ☺ Übung 12

Abgabe: bis Freitag, den 11.07.2025 um 11 Uhr

Hausaufgabe 12.1 [Irreduzibilität der Markoffketten I und II] (6 Punkte)

Wir betrachten noch einmal die Markoffketten aus Hausaufgabe 11.1 und 11.2.

- a Berechnen Sie jeweils N_x und $d(x)$ für jedes $x \in S$.
- b Ist die Markoffkette aus HA 11.1 irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort sowohl an Hand des Übergangsgraphen als auch mit einem Satz der Vorlesung.
- c Begründen Sie mit einem Satz der Vorlesung, dass die Markoffkette aus HA 11.2 nicht irreduzibel ist.

Hausaufgabe 12.2 [Kugeln hin- und herlegen]

Wir betrachten zwei Urnen, in denen sich insgesamt zwei Kugeln befinden. Einmal pro Minute wird rein zufällig eine der beiden Kugeln ausgewählt und in die andere Urne gelegt.

- a Beschreiben Sie dieses Experiment als Markoffkette: wählen Sie dazu als Zustand die Zahl der Kugeln in der ersten Urne. Zeichnen Sie den Übergangsgraphen, geben Sie eine Startverteilung Ihrer Wahl an und ermitteln Sie die zugehörige Übergangsmatrix P .
- b Bestimmen Sie eine Gleichgewichtsverteilung und begründen Sie mit einem Satz der Vorlesung, weshalb diese eindeutig ist.
- c Betrachten Sie die Folge $(\mu P^n)_{n \in \mathbb{N}}$ für die Startverteilung $\mu = (1, 0, 0)$. Zeigen Sie, dass diese Folge nicht gegen die Gleichgewichtsverteilung konvergiert.
- d Begründen Sie mit einem Satz der Vorlesung, warum die Markoffkette nicht aperiodisch ist.

Hausaufgabe 12.3 [Schirmtransport] (6 Punkte)

Herr Hagel besitzt zwei Regenschirme, von denen sich einige (oder keine) bei ihm zu Hause, und einige (oder keine) in seinem Büro befinden. Er nimmt genau dann einen Regenschirm mit sich, wenn es regnet und sich ein Regenschirm an dem Ort befindet, an dem er sich aufhält. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es regnet, wenn Herr Hagel das Gebäude verlässt, bei $1/10$ liegt.

- a** Beschreiben Sie dieses Experiment als Markoffkette: zeichnen Sie den Übergangsgraphen, geben Sie eine Startverteilung Ihrer Wahl an und bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix.
- b** Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Hagel das nächste Mal nass wird, wenn er das Gebäude verlässt? Begründen Sie Ihre Rechnungen mit einem Satz aus der Vorlesung.