Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing

Wintersemester 2022/2023

Operations Research ☺ Klausur 14. Februar 2023

Aufgabe 1 *(4 + 4 + 4 Punkte)*

a) Formulieren Sie das *primale* und das zugehörige *duale* Problem eines linearen Optimierungsproblems. Formulieren Sie den *Dualitätssatz* der linearen Optimiereng.

b) Maximieren Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) := -2x_1 - 2x_2 - 6x_3$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcr} -2x_1 + 2x_2 \phantom{{}-2x_3} & \le & 20 \\ -2x_1 \phantom{{}+2x_2} + 2x_3 & \le & -24 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 & \le & 16 \\ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 & \le & 4 \end{array} .$$

Berechnen Sie darüber hinaus die zugehörigen *Schattenpreise*.

c) Zeigen Sie, dass **a** und **b** äquivalent sind.

a Die Punkte x und y sind optimale Lösungen für das primale bzw. duale Problem.

b Es gilt:

$$x^T(A^T y - b) = 0 = y^T(Ax - c).$$

Aufgabe 2 *(4 + 4 + 4 Punkte)*

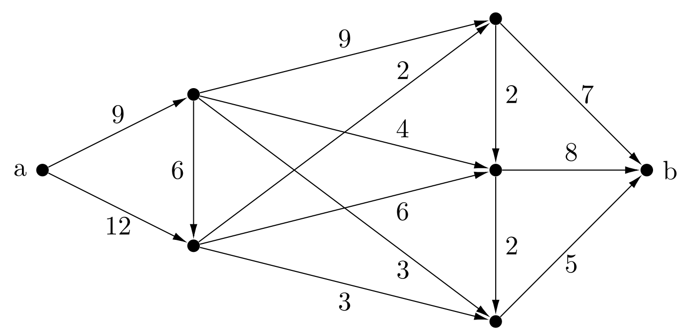
a) i) Definieren Sie den Begriff *Netzwerk*.

ii) Definieren Sie den Begriff *zulässiger Fluss*.

iii) Formulieren Sie das *Max-Flow-Min-Cut-Theorem*.

Hinweis: gemeint ist nicht die Version aus Aufgabenteil c)

b) Betrachten Sie folgenden Fluss auf einem Netzwerk mit Quelle a, Senke b und eingetragenen Kapazitäten. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson einen maximalen Fluss, dessen Wert und einen zugehörigen minimalen Schnitt.



c) Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei $N = ((X,\Gamma), a, b, c)$ ein Netzwerk und $\mathcal{T}$ die Familie aller Teilmengen $T \subset \Gamma$ derart, dass jeder gerichtete Weg von a nach b mindestens eine Kante von T enthält. Dann gilt für den Wert α eines Maximalflusses die Ungleichung

$$\alpha \leq \min_{T \in \mathcal{T}} \sum_{\gamma \in T} c(\gamma).$$

Aufgabe 3 *(4 + 4 + 4 Punkte)*

a) i) Definieren Sie den Begriff *Verhandlungssituation*.

ii) Definieren Sie den Begriff *Verhandlungslösung*.

iii) Formulieren Sie das Axiom über die *Pareto-Optimalität*

b) Vorgelegt sei ein Bimatrixspiel

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Strategiepaare, die im Gleichgewicht sind.

c) Vorgelegt sei das Bimatrixspiel aus Aufgabenteil b). Bestimmen Sie in c)i) und c)ii) jeweils eine geeignete Verhandlungssituation (x, A) und berechnen Sie

i) die Nash-Lösung für $x = (0, 0)$ nur mit Hilfe der Nash-Axiome.

ii) die Nash-Lösung für $x = (-2, -1)$.

Aufgabe 4 *(4 + 4 + 4 Punkte)*

a) i) Definieren Sie den *Shapley-Wert* eines n-Personenspiels (N, ν). Definieren Sie insbesondere alle Objekte, die in der Definition des Shapley-Wertes auftauchen.

ii) Geben Sie das Axiom *Effizienz* einer Shapley-Funktion an.

iii) Definieren Sie den *Kegel der Abstiegsrichtungen* einer Funktion f in x. Geben Sie auch die Voraussetzungen an f an.

b) In einem Spiel (N, ν) nennt man einen Spieler $i \in N$ einen *Dummyspieler*, falls für jede Teilmenge $S \subset N \setminus \{i\}$ gilt:

$$\nu(S \cup \{i\}) = \nu(S) + \nu(i).$$

Eine Abbildung $\Psi : \mathcal{P}_N \to \mathbb{R}^n$ hat die *Dummyspieler-Eigenschaft*, falls für jeden Dummy-Spieler $i \in N$ gilt:

$$\forall \nu \in \mathcal{P}_N \ : \ \Psi_i(\nu) = \nu(i).$$

Zeigen Sie, dass aus der Dummyspieler-Eigenschaft die Nullspieler-Eigenschaft folgt.

c) In (MP≤) sei $x \in S$, alle g_i, $i \in I(x)$ differenzierbar in x und

$$F_f(x) \cap G'_S(x) = \emptyset, \tag{1}$$

wobei

$$G'_S(x) := \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x) \cdot d \leq 0 \ \text{ für alle } i \in I(x)\}.$$

Zeigen Sie:

Ist x ein lokales Minimum für f in S, so gibt es $\mu_i \geq 0$, $i \in I(x)$ mit

$$\nabla f(x) + \sum_{i \in I(x)} \mu_i \nabla g_i(x) = 0.$$

Hinweis: Wie üblich bezeichnet $I(x)$ die Menge der straffen Restriktionen in x und $S := \bigcap_{i=1}^m \{g_i \leq 0\}$ den zulässigen Bereich.