Aufgabe 1 *(4 + 4 + 4 Punkte)*

a) i) Definieren Sie den Begriff *konvexe Hülle*.

ii) Definieren Sie den Begriff *Seite*.

iii) Formulieren Sie den *Satz von Minkowski-Farkas* für Gleichheit.

iv) Formulieren Sie einen *Darstellungssatz für Polyeder* ihrer Wahl.

b) Für einen Fahrradausflug brauchen wir Verpflegung. Wir wollen dazu Schokolade und Müsli einkaufen.

Eine Einheit Schoki kostet 1500 Cent, eine Einheit Müsli 920 Cent (das ist so zum Rechnen besser).

Mit einer Einheit Schoki halte ich 2 Stunden durch, schaffe 12 Kilometer und bekomme 15 Kilokalorien Energie.

Mit einer Einheit Müsli halte ich 1 Stunde durch, schaffe 8 Kilometer und bekomme 6 Kilokalorien Energie.

Ich will mindestens 8 Stunden fahren und mindestens 60 Kilometer schaffen. Außerdem brauche ich mindestens 45 Kilokalorien Energie.

Wie viele Einheiten sollte ich jeweils kaufen um die Kosten zu minimieren?

c) Es sei P ein Polyeder und L sein Linienraum. Beweisen Sie folgende Aussagen:

i) $L = \{0\} \Leftrightarrow$ Für $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq c\}$ gilt $\operatorname{rang} A = n$.

ii) Ist P spitz und $\sup_P f < \infty$, so nimmt f auf P das Maximum in einem Extremalpunkt von P an.

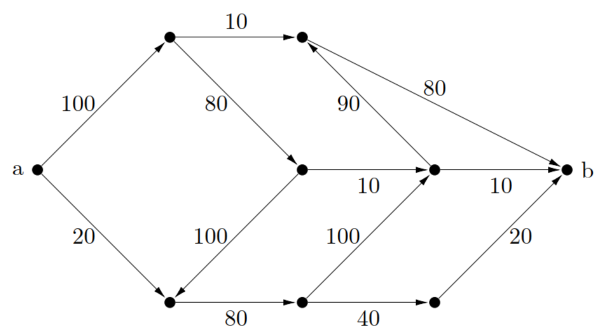
iii) Es sei S eine Seite einer konvexen Menge $B \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt $S_e = B_e \cap S$.

Hinweis zu c): Es werden nur zwei der drei Beweise gewertet.

Aufgabe 2 *(2 + 8 + 2 Punkte)*

a) Definieren Sie den Begriff *zulässiger Fluss* und alle in dieser Definition auftretenden Objekte.

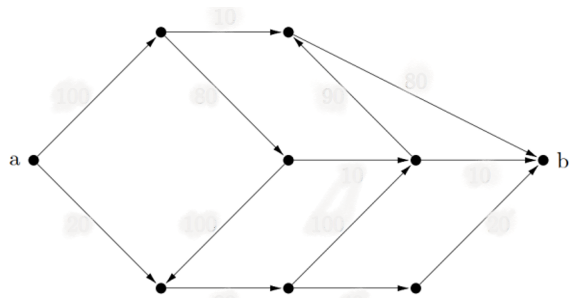
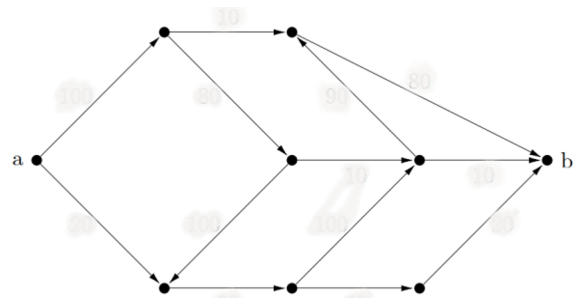
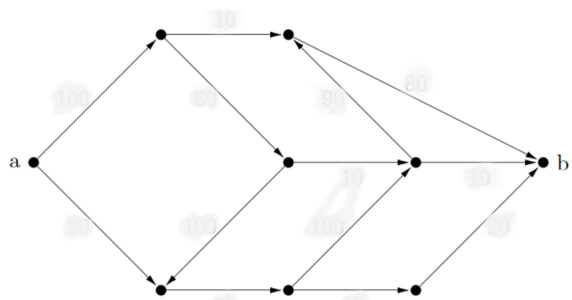
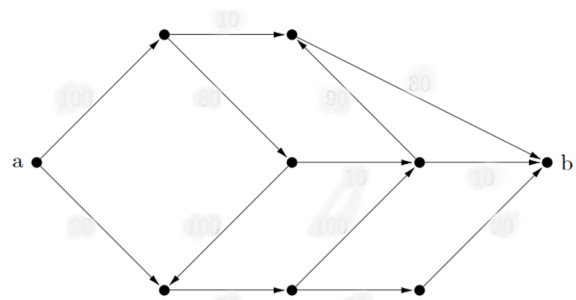
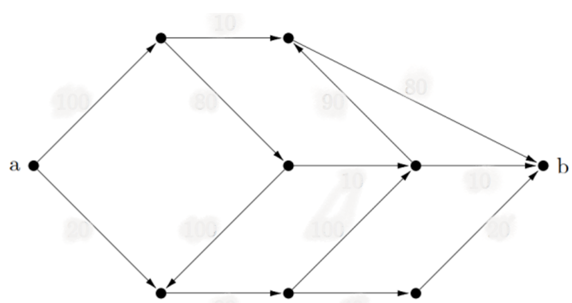
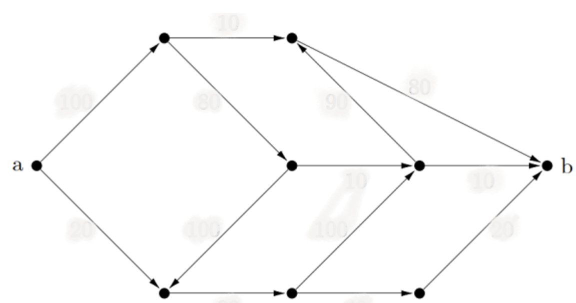
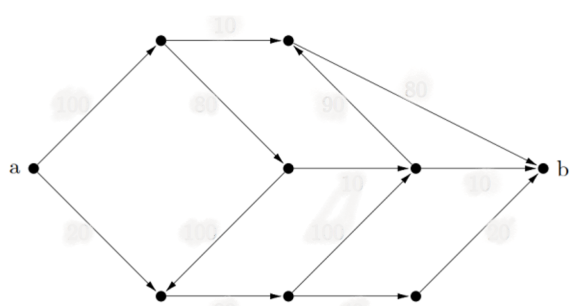
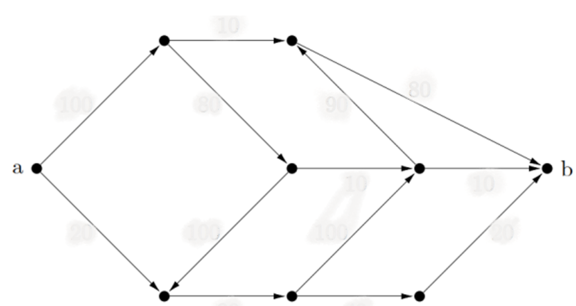
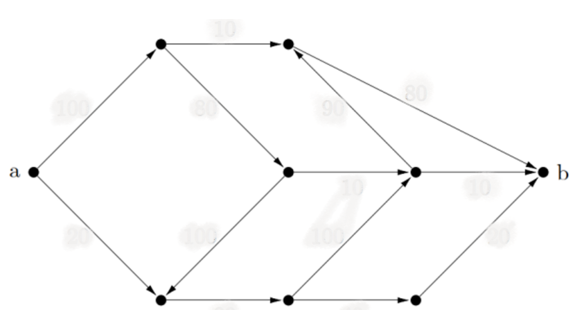
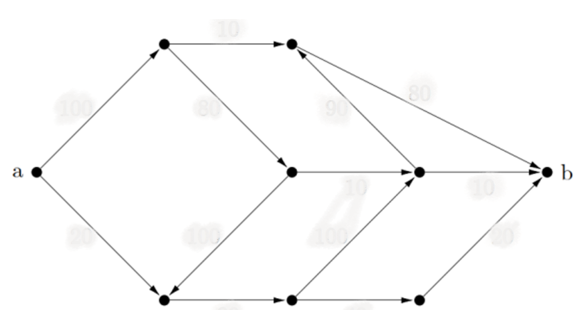
b) Betrachten Sie folgenden Fluss auf einem Netzwerk mit Quelle a, Senke b und eingetragenen Kapazitäten. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson einen maximalen Fluss, dessen Wert, einen zugehörigen minimalen Schnitt und eine Zyklenzerlegung des Maximalflusses.

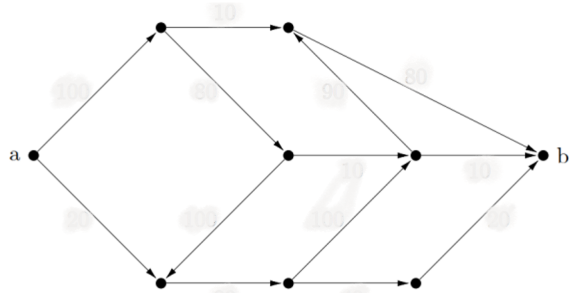


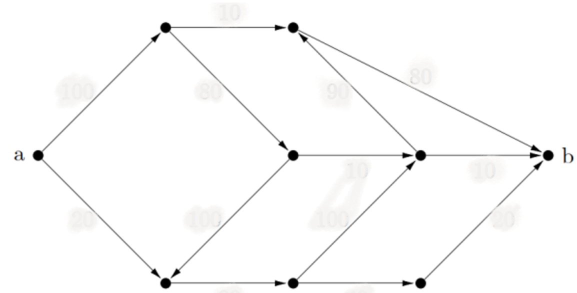
c) Beweisen Sie folgenden Satz:

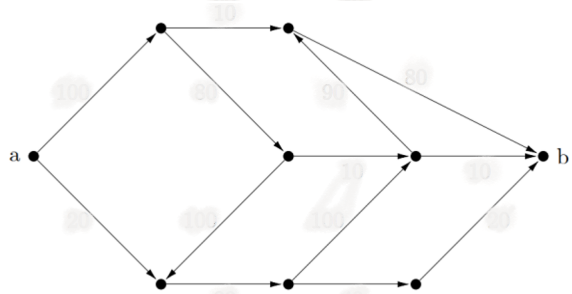
Sei φ ein zulässiger Fluss und $A \subset X$ mit $a \in A$ und $b \notin A$. Dann gilt:

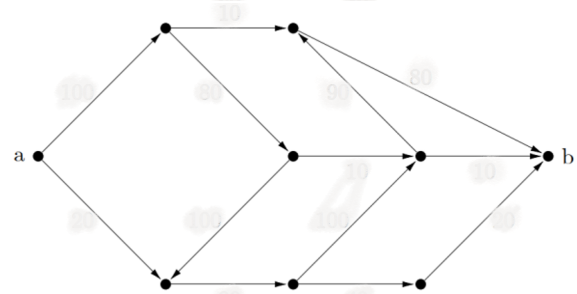
$$\varphi(b, a) \leq \sum_{\gamma \in A_{\rightarrow}} c(\gamma).$$

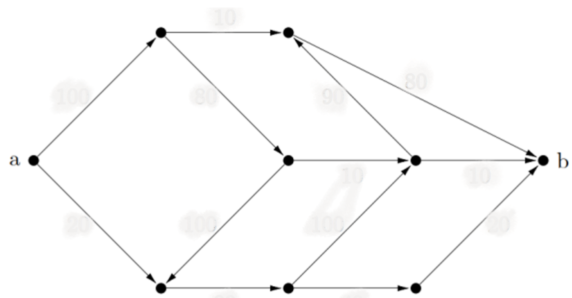

a
b

a
b

a
b

a
b

a
b

a
b

a
b

a
b

a
b

a
b

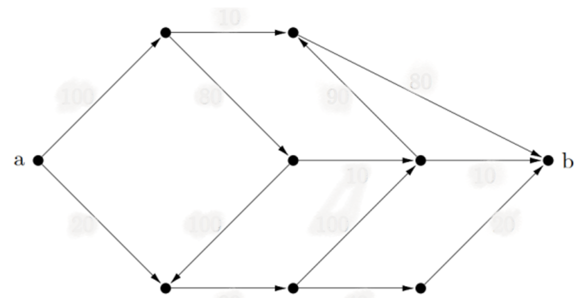

a
b

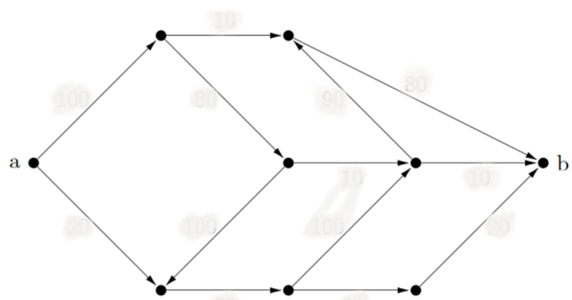

a
b

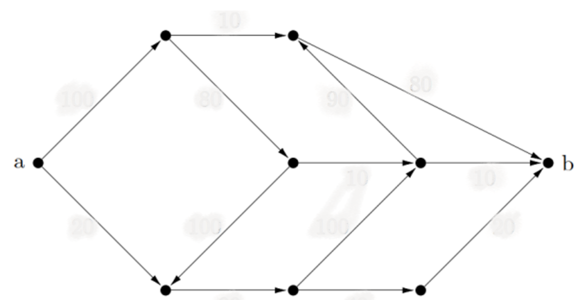

a
b


a
b


a
b


a
b


a
b


a
b

Aufgabe 3 *(3 + 5 + 4 Punkte)*

a) i) Definieren Sie die Eigenschaft einer Imputation z, eine Imputation w bezüglich einer Koalition zu *dominieren*.

ii) Formulieren Sie das Nash-Axiom über die *Pareto-Optimalität*.

b) Wir betrachten ein Bimatrixspiel mit folgenden Auszahlungsmatrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Strategien von Spieler 1 jeweils die Zeilen und von Spieler 2 jeweils die Spalten der Matrizen.

i) Skizzieren Sie eine geeignete Verhandlungsmenge (x, A). Dabei sei $x = (1, 1)$ der Garantiepunkt (beziehungsweise die Konfliktlösung).

ii) Bestimmen Sie in Teil **b)i)** die Nash-Lösung.

iii) Vorgelegt sei die Abbildung

$$T((a_1, a_2)) := (a_1 - 1, \tfrac{1}{2} a_2).$$

Berechnen Sie die Nash-Lösung zu

$$((0, \tfrac{1}{2}), T(A)).$$

c) Für den Kern eines $n-$Personenspiels gilt bekanntlich:

$$\text{Kern}((N, \nu)) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \forall K \subset N : \sum_{k \in K} z_k \geq \nu(K) \ , \ \sum_{k=1}^{n} z_k = \nu(N) \right\}.$$

i) Zeigen Sie die Inklusion $\supset$.

ii) Zeigen Sie: Für wesentliche Konstantsummenspiele ist der Kern leer.

Hinweis zu c): Es wird nur eine der beiden Teilaufgaben gewertet.

Aufgabe 4 *(3 + 5 + 4 Punkte)*

a) Wir betrachten drei Parteien $N = \{1, 2, 3\}$ mit jeweils 2, 49 und 49 Sitzen im Parlament. Es sei $\nu(S) \in \{0, 1\}$ und $\nu(S) = 1$ für alle Koalitionen, die mehr als 50% der Mandate haben. Berechnen Sie die Shapley-Werte der Parteien.

b) Wir wollen die Funktion

$$f(x, y) = -y + x^3$$

auf $\mathbb{R}^2$ unter den Bedingungen

$$-x - y + 1 \leq 0$$
$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

betrachten. Geben Sie eine globale Minimalstelle für f unter den gegebenen Bedingungen an. Weisen Sie die globale Minimalität nach.

c) Wir wollen die Funktion

$$f(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{2n} x_i^2$$

auf $\mathbb{R}^{2n}$ unter den Bedingungen

$$g_j(x_1, \ldots, x_{2n}) := x_j + x_{j+1} - 2 = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq 2n - 1$$

betrachten. Geben Sie eine globale Minimalstelle für f unter den gegebenen Bedingungen an. Weisen Sie die globale Minimalität nach.

<u>Hinweis zu b) und c):</u> Der Nachweis erfolgt durch Anwendung entsprechender Sätze der Vorlesung. Hier müssen eventuell Voraussetzungen geprüft werden.