Kapitel 1

Grundlagen

In der Vorlesung befassen wir uns mit

- Modellierung von funktionalen Zusammenhängen, Approximationsprozesse:
  Dies führt auf Fragen aus der *Analysis*.
- Modellierung zufälliger Phänomene:
  Dies führt auf Fragen aus der *Stochastik* (stochastikós: altgriechisch für scharfsinnig im Vermuten), der Lehre von den Gesetzmäßigkeiten des Zufalls.

1.1 Zahlen

Beispiele für Zahlenmengen:

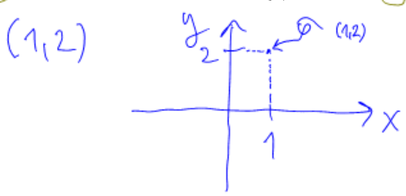
- Natürliche Zahlen: 1, 2, 3, ...; Notation als Menge: $\mathbb{N}$
  Die natürlichen Zahlen sind durch die sogenannten *PEANO-Axiome* festgelegt.
- Ganze Zahlen: 0, 1, -1, 2, -2, ...; Notation als Menge: $\mathbb{Z}$
  Die ganzen Zahlen erweitern die natürlichen Zahlen, so dass man Differenzen bilden kann.
- Rationale Zahlen, z.B. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{7}, ...$; Notation als Menge: $\mathbb{Q}$
  Die rationalen Zahlen erweitern die ganzen Zahlen, so dass man (außer durch 0) dividieren kann.
- Reelle Zahlen: rationale Zahlen und solche Zahlen wie $\sqrt{2}, \pi, e, ...$; Notation als Menge: $\mathbb{R}$
  Die reellen Zahlen erweitern die rationalen Zahlen, so dass der „Zahlenstrahl keine Lücken mehr aufweist". Wenn man mit reellen Zahlen rechnet, so rechnet man symbolisch (d.h. mit dem Symbol $\sqrt{2}$) oder man approximiert die reelle Zahl durch rationale Zahlen (z.B. $\sqrt{2} \approx 1,41$) und rechnet näherungsweise mit dieser Zahl. Man erhält solche Näherungen z.B. aus der Dezimalbruchdarstellung, die reelle Zahlen besitzen. (Mehr Details zu Eigenschaften reeller Zahlen finden sich im Kapitel 2).

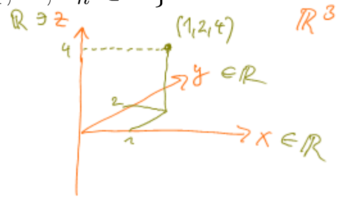
Der Aufbau des Zahlensystems von $\mathbb{N}$ bis $\mathbb{Q}$ wird ausführlich in der Veranstaltung Arithmetik und Algebra behandelt. Ergänzende Hinweise zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ erfolgen hier in späteren Kapiteln.

Messwerte. Messwerte sind Maßzahlen mit Maßeinheiten, z.B. 4 kg, 2,7 m usw.. Maßzahlen sind meist reelle Zahlen. Die Maßeinheit gibt die Dimension (oder den Größenwert)an. Konvention: Beim Rechnen rechnen wir nur mit den Maßzahlen und führen die Einheit am Ende in Klammern, z.B. $2 + 3 = 5$ [kg].

Variablen. Variablen sind Platzhalter für Zahlen oder andere Objekte, die man für die Variablen einsetzen kann. Typischerweise notiert man Variablen mit kleinen oder großen Buchstaben, z.B. x, y, z, A, B, C,... . Man unterscheidet *unabhängige* Variablen, in die man (ohne Einschränkungen) einfach einsetzen kann, und *abhängige* Variablen, deren Wert von einer anderen Variablen abhängt, z.B. ist y gegeben durch $y = x^2 + 1$ eine abhängige Variable. Mithilfe von abhängigen Variablen lassen sich „Zuordnungen" beschreiben: $x \mapsto y = x^2 + 1$. $\mathbb{Z} \ni x \longmapsto x^2+1 = y$
Treten viele Variablen auf, so notieren wir sie mit Indizes, z.B. $x_1, x_2, x_3, Y_1, Y_2, Y_3$....

Zahlenpaare, Koordinatensystem. Während $\mathbb{R}$ als Zahlenstrahl veranschaulicht wird, werden Zahlenpaare (x, y) mit $x, y \in \mathbb{R}$ in der Koordinatenebene dargestellt, z.B. im *kartesischen Koordinatensystem*, in dem die beiden Koordinatenachsen (Zahlenstrahle für den ersten und den zweiten Wert) senkrecht zueinander stehen oder in einem *affinen Koordinatensystem*, in dem die Achsen in einem Winkel zwischen 0 und 90 Grad zueinander stehen. Die Achsen werden - je nach Zusammenhang - unterschiedlich bezeichnet. Die horizontale Achse heißt häufig x- oder t-*Achse* oder *Abszisse*, die vertikale Achse entsprechend y-*Achse* oder *Ordinate*. Die Einheiten auf den Achsen dürfen unterschiedlich sein.
Als Menge notieren wir Paare reeller Zahlen als sog. *kartesisches Produkt*: $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Die Elemente aus $\mathbb{R}^2$ werden - je nach Zusammenhang - notiert als Punkte $P(2; 4)$, $P(2|4)$ oder als 2-Tupel $\binom{2}{4}$, $(2, 4)$. Entsprechend definiert man *Zahlentripel* und n-*Tupel* durch $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ oder allgemeiner $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} := \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$.





1.2 Aussagenlogik

1.2.1 Aussagen

Genau zu definieren, was eine mathematische Aussage ist, ist überraschend schwierig. Wir wollen möglichst praktisch bleiben und verwenden folgende

Definition 1.2.1. Eine *Aussage* ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Diese Definition ist für unsere Zwecke ausreichend. Hier sind einige

Beispiele 1.2.2.

1 „Es gibt unendlich viele Primzahlen."

2 „Alle Katzen sind grau."

3 „$0 = 1$ "

Nicht jeder Satz ist eine Aussage, hier einige

Beispiele 1.2.3.

1 „Öffne das Fenster!"

2 „Diese Aussage ist falsch."

3 „n ist eine ungerade Zahl. " $=: A(n)$

Einschub 1.2.4. ... (In 3) ist zB $n \in \mathbb{N}$ (eine Variable), deshalb nennt man dies eine Aussageform, zB $A(n)$. Eine Aussageform muss je nach Wert der Variable wahr / falsch sein.

Definition 1.2.5. Die *Negation* einer Aussage A ist diejenige Aussage, die falsch ist, wenn A wahr ist - und umgekehrt.

Die Negation einer Aussage A bezeichnet man mit Nicht(A) oder formaler mit $\neg A$.

Beispiele 1.2.6.

1 $\neg$(„Alle Katzen sind grau") bedeutet „Es gibt eine Katze, die nicht grau ist."

2 $\neg$(„$0 = 1$") bedeutet „$0 \neq 1$"

1.2.2 UND, ODER

Aussagen kann man zu neuen Aussagen verknüpfen. Der Wahrheitswert der neuen Aussage ist abhängig von der Verknüpfung. Wir betrachten ein Gnu sowie die Aussagen

$$F = \text{Das Gnu ist ein Fisch},$$
$$S = \text{Das Gnu ist kein Säugetier},$$
$$W = \text{Das Gnu lebt ausschließlich im Wasser}.$$
$$V = \text{Das Gnu ist ein Vogel}.$$

Das G ist F und das G ist kein V

$\neg(A \wedge B)$

$\neg(F \text{ und } \neg V) \;\hat{=}\; \underbrace{\neg F}_{\neg A} \text{ oder } \underbrace{\neg(\neg V)}_{\neg B} \;\hat{=}\; \neg F \text{ oder } V = \text{GikF oder GiV}$

Die Aussage „F und ¬ V“ ist falsch. Die Aussage „W oder ¬ S“ ist wahr.
Die Wahrheitswerte von mit und/oder verknüpften Aussagen werden durch Wahrheitstabellen festgelegt.

Einschub 1.2.7. ... Seien A, B Aussagen. $\wedge$ „=“ und $\vee$ „=“ oder

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Negationen von „und “ und „oder “ sind durch elegante Symmetrie miteinander verbunden.

$$\neg(A \wedge B) \quad \text{hat den gleichen Wahrheitswert wie} \quad \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \quad \text{hat den gleichen Wahrheitswert wie} \quad \neg A \wedge \neg B$$

Einschub 1.2.8. ...

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	w	w
f	w	w	w	f	w
f	f	w	w	w	w

1.2.3 Implikation

Die meisten mathematischen Aussagen sind von der Form

„Wenn Aussage A wahr ist, dann ist Aussage B wahr.“

Man sagt dann „A impliziert B “oder „Aus A folgt B“. Man notiert $A \Rightarrow B$.
Derartige Wenn/Dann Verknüpfungen können allerdings selbst wahr oder falsch sein. Außerdem gilt: aus dem Wahrheitswert der Implikation lassen sich keine Rückschlüsse auf den Wahrheitswert der beteiligten Aussagen ziehen.

Beispiele 1.2.9.

1 „Wenn ich Winston Churchill bin, dann bin ich Engländer. “

2 „Wenn ich Engländer bin, dann bin ich Winston Churchill. “