

1.2.2 UND, ODER

Aussagen kann man zu neuen Aussagen verknüpfen. Der Wahrheitswert der neuen Aussage ist abhängig von der Verknüpfung. Wir betrachten ein Gnu sowie die Aussagen

F = Das Gnu ist ein Fisch,

S = Das Gnu ist kein Säugetier,

W = Das Gnu lebt ausschließlich im Wasser.

V = Das Gnu ist ein Vogel.

Die Aussage „ F und $\neg V$ “ ist falsch. Die Aussage „ W oder $\neg S$ “ ist wahr.

Die Wahrheitswerte von mit und/oder verknüpften Aussagen werden durch Wahrheitstabellen festgelegt.

Einschub 1.2.7. ...

Die Negationen von „und“ und „oder“ sind durch elegante Symmetrie miteinander verbunden.

$\neg(A \wedge B)$ hat den gleichen Wahrheitswert wie $\neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B)$ hat den gleichen Wahrheitswert wie $\neg A \wedge \neg B$

Einschub 1.2.8. ...

1.2.3 Implikation

Die meisten mathematischen Aussagen sind von der Form

„Wenn Aussage A wahr ist, dann ist Aussage B wahr.“

Man sagt dann „ A impliziert B “ oder „Aus A folgt B “. Man notiert $A \Rightarrow B$.

Derartige Wenn/Dann Verknüpfungen können allerdings selbst wahr oder falsch sein. Außerdem gilt: aus dem Wahrheitswert der Implikation lassen sich keine Rückschlüsse auf den Wahrheitswert der beteiligten Aussagen ziehen.

Beispiele 1.2.9.

1 „Wenn ich Winston Churchill bin, dann bin ich Engländer.“

2 „Wenn ich Engländer bin, dann bin ich Winston Churchill.“

3 Wenn x gerade ist, dann ist x^2 gerade.

4 Die Summe zweier geraden Zahlen ist gerade.

Einschub 1.2.10. ... Zu 3 Sei $x \in \mathbb{Z}$. Beh x gerade $\Rightarrow x^2$ gerade

Bew Da $x \in \mathbb{Z}$ gerade ist, gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{Z}$ so dass $x = 2 \cdot N$ gilt (Definition gerade Zahl). Dann folgt: $x^2 = (2 \cdot N)^2 = 4 \cdot N^2 = 2 \cdot 2 \cdot N^2 = 2 \cdot (2N^2)$. Weil $N \in \mathbb{Z}$ ist, ist auch $2 \cdot N^2 \in \mathbb{Z}$. Also ist x^2 gerade. $\square$ Zu 4 "a gerade und b gerade $\Rightarrow a+b$ gerade"

Bevor wir die Wahrheitstabelle der Implikation definieren betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiele 1.2.11. Die Aussage $1 = -1$ ist für die ganzen Zahlen $1, -1 \in \mathbb{Z}$ falsch. Allerdings können wir beide Seiten der Gleichung quadrieren und erhalten die wahre Aussage $1 = 1$. Daher ist die Implikation

$$\boxed{1 = -1 \Rightarrow 1 = 1} \leftarrow \text{wahre Aussage}$$

wahr. Hier ein weiteres Beispiel:

Einschub 1.2.12. ... "Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: n durch 4 teilbar $\Rightarrow n$ gerade." Diese Aussage ist wahr, also auch für spezielle $n \in \mathbb{N}$:

$n=1$ 1 ist durch 4 teilbar $\Rightarrow$ 1 gerade
 $n=2$ 2 ist durch 4 tb $\Rightarrow$ 2 gerade
 $n=3$ 3 ist durch 4 tb $\Rightarrow$ 3 gerade
 $n=4$ 4 ist durch 4 tb $\Rightarrow$ 4 gerade

$\textcircled{f} \Rightarrow \textcircled{f}$ $\times$
 $f \Rightarrow \textcircled{w}$
 $\textcircled{f} \Rightarrow f$ —
 $\textcircled{w \Rightarrow w}$

Es folgt nun die Wahrheitstabelle für die Implikation.

Einschub 1.2.13. ...

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Definition 1.2.14. Zwei Aussagen A und B heißen äquivalent, wenn sowohl $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ wahr sind. Man schreibt dann $A \Leftrightarrow B$.

Äquivalenzpfeil

Beispiele 1.2.15.

1 „ $x > 5 \Leftrightarrow -x < -5$ “ ist wahr.

2 „Die Straße ist nass.“ $\Leftrightarrow$ „Es regnet.“ ist falsch

3 $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ist falsch.

die Aussage

wahr ist: $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

Einschub 1.2.16. ... $A(x)$ ist „ $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ “, Wir prüfen ob $A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr ist. $x \neq 3$ „ $x^2 = 9$ “ falsch, „ $x = 3$ “ falsch, also sind die Wahrheitswerte von $A(x)$: $f \Leftrightarrow f$ ist wahr laut 1.2.13 $x = 3$ „ $x^2 = 9$ “ wahr, „ $x = 3$ “ wahr, also $A(x)$: $w \Leftrightarrow w$ ist wahr $x = -3$ „ $x^2 = 9$ “ wahr, „ $x = 3$ “ falsch also $A(x)$: $w \Leftrightarrow f$ ist falsch, denn: $w \Rightarrow f$ ist eine falsche Aussage.

1.3 Mengen

Viele mathematische Sachverhalte werden ‚mengentheoretisch‘ formuliert. In diesem Sinne ist die Mengenlehre so etwas wie die Sprache der Mathematik.

Naives Verständnis von Mengen:

Unter einer *Menge* versteht man eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Die Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Wohlbestimmt bedeutet, dass eindeutig feststellbar ist, ob ein Objekt x zu einer Menge M gehört, wir schreiben dann

$$x \in M,$$

oder nicht, wir schreiben dann

$$x \notin M.$$

$$M = \{2, 4\} \text{ ok}$$

$$\uparrow N = \{2, 2\} \text{ schreibe als } N = \{2\}$$

Wohlunterschieden bedeutet, dass kein Element mehrfach zu einer Menge gehört.

Eine Menge A heißt (*echte*) *Teilmenge* von M falls jedes Element von A auch ein Element in M ist (bzw. und zusätzlich $A \neq M$ ist). Man notiert $A \subset M$. Man kann Mengen *explizit*, indem man eine Liste aller Elemente angibt, oder *implizit* beschreiben, indem man die Menge als die Teilmenge einer anderen Menge angibt, in der alle Elemente mit einer gewissen Eigenschaft zusammengefasst sind.

Beispiel 1.3.1.

a) Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung $x^2 - 1 = 0$ ist implizit beschrieben durch

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}$$

und explizit durch $\mathbb{L} = \{-1, 1\}$ (Tippfehler)

b) *Intervalle* sind Teilmengen der reellen Zahlen

- abgeschlossenes Intervall von a bis b :

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (-1, 5]$$

- halboffene Intervalle von a bis b :

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

- offenes Intervall von a bis b :

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

Die Zahlen a und b heißen *Eckpunkte* des Intervalls. a oder b können auch gleich $\pm\infty$ sein.

- c) Die *leere Menge* $\emptyset := \{\}$ ist die Menge ohne Elemente und kann z.B. wie folgt angegeben werden:
 $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ und } x > 1\}$

Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten: $A = B$ genau dann, wenn $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ also genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt. Dies kann man zum Beispiel durch vollständige Fallunterscheidung beweisen.

$$A \subseteq B \quad B \subseteq A$$

Mengentheoretische Operationen (Teil 1)

Seien A, B Teilmengen von M .

Schnittmenge (Durchschnitt) von A und B :

$$A \cap B := \{x \in M \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Vereinigungsmenge von A und B :

$$A \cup B := \{x \in M \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

(Mengen-)Differenz von A und B (auch Komplement von B in A):

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Ist $A = M$, so heißt $B^C := M \setminus B$ *Komplement von B* .

Einschub 1.3.2. ...

$$A = \{\Delta, \square, \circ\}, \quad B = \{\Delta, \triangle\}$$

$$A \cap B = \{\Delta\}, \quad A \cup B = \{\Delta, \square, \circ, \triangle\}$$

$$G := \{2, 4, 6, \dots\} \subset \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \setminus G = \{1, 3, 5, \dots\}$$

Die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen von M heißt *Potenzmenge* von M .

Einschub 1.3.3. ... $M = \{a, x\}, \quad \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{x\}, \{a, x\}\}$

Beh $\emptyset \subset M$

Bew wir zeigen: $x \in \emptyset \Rightarrow x \in M$ ist eine wahre Aussage.

Dazu betrachten die Wahrheitswerte:

f	$\Rightarrow$	f (falls $x \notin M$)	} ist wahre Aussage $\square$
f	$\Rightarrow$	w (falls $x \in M$)	

Man kann zeigen: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ geordnetes Tupel ist nicht: offenes Intervall
 (Kartesisches) Produkt von A und B :

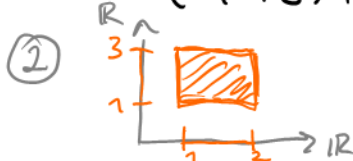
$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Das ist also die Menge aller geordneten Paare bestehend aus Elementen von A (erster Eintrag) und Elementen von B (zweiter Eintrag).

Einschub 1.3.4. ① $A = \{T(\text{isch}), S(\text{tuhl}), W(\text{eihnachtsbaum})\}$

$$B = \{g(\text{rün}), r(\text{ot})\} \quad \Delta (T, g) \neq (g, T)$$

$$A \times B = \{(T, g), (T, r), (S, g), (S, r), (W, g), (W, r)\} \quad \cap B \times A$$



$$[1, 2] \times [1, 3] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2], y \in [1, 3]\}$$

$$\textcircled{3} |A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Außerdem gibt es Rechengesetze für Mengen:

$$\text{kommutativ} \quad A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$

$$\text{assoziativ} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad \text{distributiv} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Einschub 1.3.5. ... $A \subset B$ beweisen: zu zeigen ist: " $x \in A \Rightarrow x \in B$ " ist

wahr. Wir zeigen: $(a, b) \subset [a, b] \quad x \in (a, b) \Leftrightarrow \text{Defn} \quad \underline{a < x < b}$

$$\Rightarrow a \leq x \leq b \quad \Leftrightarrow \text{Defn} \quad x \in [a, b]$$

$$\textcircled{a < x} \Rightarrow \textcircled{a < x \vee a = x} \quad \Leftrightarrow \text{Defn} \quad \textcircled{a \leq x}$$

$\text{w} \Rightarrow \text{w} \vee \text{f} \quad \text{w}$

1.4 Relationen, Abbildungen, Funktionen

Definition 1.4.1 (Relation). Seien A und B Mengen. Eine *Relation* zwischen A und B ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$. Ist ein Paar (a, b) Element von R , so sagt man dann, dass a in Relation R zu b steht. Wir schreiben in diesem Fall: aRb .

Einschub 1.4.2. ...

Beispiel 1.4.3.

- Kleiner-Gleich-Relation auf $A = B = \mathbb{N}$
- Kleiner-Gleich-Relation auf $A = B = \mathbb{R}$, Gleichheitsrelation, Teilbarkeitsrelation auf $A = B = \mathbb{N}$
- Geraden, Kreise, Parabeln in $\mathbb{R}^2$ (siehe Kapitel 2)