

- *abgeschlossenes* Intervall von a bis b :

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

- *halboffene* Intervalle von a bis b :

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

- *offenes* Intervall von a bis b :

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Die Zahlen a und b heißen *Eckpunkte* des Intervalls. a oder b können auch gleich $\pm\infty$ sein.

- c) Die *leere Menge* $\emptyset := \{\}$ ist die Menge ohne Elemente und kann z.B. wie folgt angegeben werden:
 $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ und } x > 1\}$

Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten: $A = B$ genau dann, wenn $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ also genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt. Dies kann man zum Beispiel durch vollständige Fallunterscheidung beweisen.

Mengentheoretische Operationen (Teil 1)

Seien A, B Teilmengen von M .

Schnittmenge (Durchschnitt) von A und B :

$$A \cap B := \{x \in M \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Vereinigungsmenge von A und B :

$$A \cup B := \{x \in M \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

(Mengen-)Differenz von A und B (auch Komplement von B in A):

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Ist $A = M$, so heißt $B^C := M \setminus B$ *Komplement von B* .

Einschub 1.3.2. ... 1) zz: $A \setminus B = A \cap B^C$ Bew " $\subseteq$ " $x \in A \setminus B \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \notin B$
" $\supseteq$ " $x \in A \cap B^C \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \in B^C \stackrel{\text{Def}}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B \quad \square$
kurz Bew $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \quad \square$
2) zz $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ $\neq \emptyset$ Bew " $\subseteq$ " $x \in A \cap B \stackrel{\text{Def}}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$
" $\supseteq$ " $x \in A \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x \in A \cap B : x \in A \stackrel{\text{Vor}}{\Rightarrow} x \in B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \stackrel{\text{Def}}{\Rightarrow} x \in A \cap B \quad \square$



Die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen von M heißt *Potenzmenge von M* .

Einschub 1.3.3. ...

(Kartesisches) Produkt von A und B :

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Das ist also die Menge aller geordneten Paare bestehend aus Elementen von A (erster Eintrag) und Elementen von B (zweiter Eintrag).

Einschub 1.3.4. ...

Außerdem gibt es **Rechengesetze für Mengen**:

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$

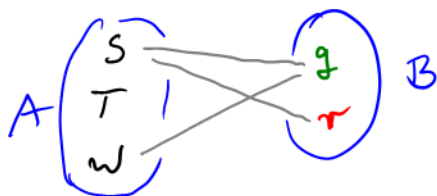
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Einschub 1.3.5. ...

1.4 Relationen, Abbildungen, Funktionen

Definition 1.4.1 (Relation). Seien A und B Mengen. Eine *Relation* zwischen A und B ist eine Teilmenge $R \subset A \times B$. Ist ein Paar (a, b) Element von R , so sagt man dann, dass a in Relation R zu b steht. Wir schreiben in diesem Fall: aRb .

Einschub 1.4.2. ... $A = \{s, t, w\}$, $B = \{g, r\}$ Relation zwischen A und B ist: "Gegenstand kommt mit Farbe vor"



$$R = \{(s, g), (s, r), (w, g)\} \subset A \times B$$

$s R g$

$$R^{-1} = \{(g, s), (r, s), (g, w)\}$$

Einschub 1.4.6

Beispiel 1.4.3.

- 1) • Kleiner-Gleich-Relation auf $A = B = \mathbb{N}$
- 2) • Kleiner-Gleich-Relation auf $A = B = \mathbb{R}$, Gleichheitsrelation, Teilbarkeitsrelation auf $A = B = \mathbb{N}$
- Geraden, Kreise, Parabeln in $\mathbb{R}^2$ (siehe Kapitel 2)
- 3) Hörsaalrelation

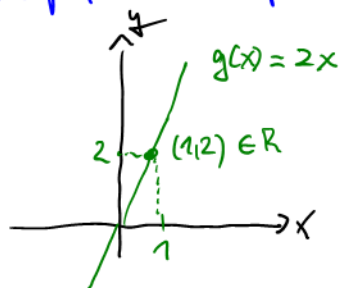
Einschub 1.4.4. ...

1) $a, b \in \mathbb{N}$, " $R = \leq$ ", $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ oder $a = b$, $\leq = R = \{ \underset{1R1}{(1,1)}, \underset{2R3}{(1,2)}, \dots, (2,2), (2,3), \dots \} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

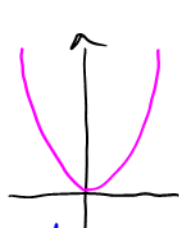
2) " $=$ " $= R = \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b \}$, 2R2

3) $S := \{ \text{Studis im HS} \}$, $R \subset S \times S$, $x R y \Leftrightarrow x$ sitzt in der selben Reihe wie y

4) Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschreibt eine Relation auf $\mathbb{R}$. Zum Beispiel der Graph einer Funktion ($\leftarrow$ später genauer)

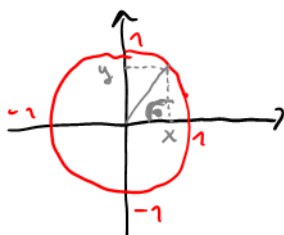


$$g(x) = 2x \quad R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \} = \{ (x, 2x) \mid x \in \mathbb{R} \}, \quad a R b \Leftrightarrow b = 2a$$



$$h(x) = x^2 \quad R' = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}, \quad a R' b \Leftrightarrow a^2 = b$$

Teilmenge müssen nicht immer Graphen von Funktionen sein:



$$\tilde{R} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

$$x^2 + y^2 = 1^2 \quad \text{Pythagoras}$$

Definition 1.4.5 (Umkehrrelation). Ist $R \subset A \times B$ eine Relation von A nach B , so ist durch

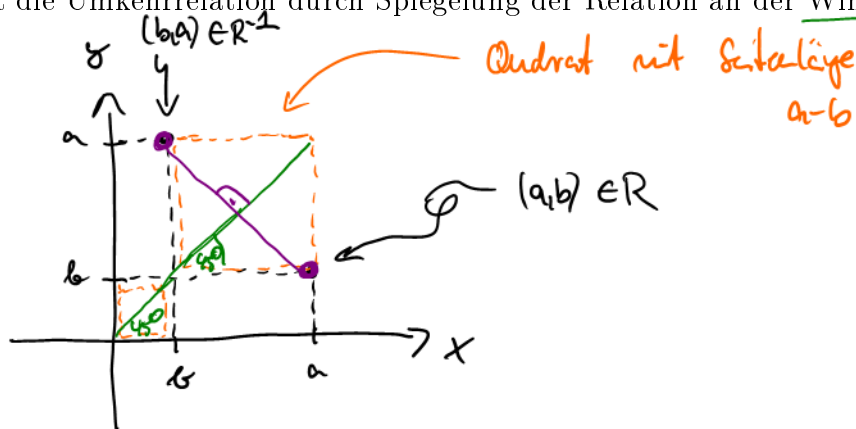
$$R^{-1} := \{(b, a) \in B \times A \mid aRb\}$$

eine Relation von B nach A , die sogenannte *Umkehrrelation* zu R , definiert.

Einschub 1.4.6. ... Im obigen Beispiel ist R^{-1} : Farbe kommt als Farbe von Gegenstand vor, $R^{-1} = \{ (\text{siehe oben} \uparrow \dots) \}$

Im Fall $A = B$ entsteht die Umkehrrelation durch Spiegelung der Relation an der Winkelhalbierenden.

Einschub 1.4.7. ...



1.4.1 Äquivalenzrelationen

Definition 1.4.8. Äquivalenzrelation Eine Relation $\sim$ auf einer Menge A (d.h. zwischen A und A) heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

Reflexivität Für alle $a \in A$ gilt: $a \sim a$

Symmetrie Für alle $a, b \in A$ gilt: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

Transitivität Für alle $a, b, c \in A$ gilt: $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Gilt $a \sim b$, so heißen a und b *äquivalent*.

Bemerkung 1.4.9. Die Äquivalenzrelation $\sim$ zerlegt die Grundmenge A in Teilmengen von A , die sogenannten *Äquivalenzklassen*, so dass jedes Element von A in genau einer der Äquivalenzklassen liegt. Die Äquivalenzklassen sind paarweise *disjunkt* (haben paarweise eine leere Schnittmenge) und ergeben als Vereinigung ganz A . Die Äquivalenzklasse von $a \in A$ notieren wir als

$$[a] := \{b \in A \mid b \sim a\}. \quad a \in [a]$$

Beispiele 1.4.10. Sei $m \in \mathbb{N}, m > 1$. Auf $A = B = \mathbb{Z}$ definiert

$$a \sim b \Leftrightarrow [b - a \text{ ist durch } m \text{ teilbar}]$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind die *Restklassen modulo m* .

$m \mid b - a$
} 2)

Einschub 1.4.11. 1) Hörsaalrelation II: $S = \{\text{Studz in Hörsaal}\}$

$xR'y \Leftrightarrow x$ und y sitzen in derselben Reihe oder in derselben Spalte

ist nicht transitiv also keine ÄR

2) $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m > 1$: $a \sim b \Leftrightarrow m \mid b-a$ Beh $\sim$ ist ÄR

Bew reflexiv $a \in \mathbb{Z}$: $a \sim a \Leftrightarrow m \mid a-a = 0 \checkmark$

symmetrisch $a \sim b \Rightarrow m \mid b-a \Rightarrow$ es gibt $N \in \mathbb{Z}$ so dass $m \cdot N = b-a$

$\stackrel{(-1)}{\Rightarrow} m \cdot (-N) = \underbrace{-(b-a)}_{=a-b} \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow b \sim a$

transitiv $a \sim b, b \sim c \Rightarrow m \mid b-a, m \mid c-b \Rightarrow$ es gibt $N \in \mathbb{Z}$

und $N' \in \mathbb{Z}$ so dass gilt: $m \cdot N = b-a, m \cdot N' = c-b$

$$\Rightarrow c-a = \underbrace{c-b}_{=0} + b-a = m \cdot N' + m \cdot N = m(N'+N)$$

$$\Rightarrow m \mid c-a \Rightarrow \underline{a \sim c} \quad \square$$

Äquivalenzklassen modulo m $\sim$ ist ÄR auf $\mathbb{Z}$, daher wird $\mathbb{Z}$

in Klassen zerlegt: $[1] = \{1 + k \cdot m \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, 1-2m, 1-m,$

$1+0 \cdot m, 1+m, 1+2m, \dots\}$. Dann gilt, $a, b \in [1]$: $b-a =$

$$= 1 + k_b \cdot m - (1 + k_a \cdot m) = m(k_b \overset{\text{für}}{-} k_a) \Rightarrow m \mid b-a$$

$\Rightarrow a \sim b$. Genauso für $[z]$ mit $z \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \dots &= [-m] = [0] = [m] = [2m] \\ \dots &= [1-m] = [1] = [1+m] = [1+2m] = \dots \\ \dots &= [2] = [2+m] = [2+2m] = \dots \\ &\vdots \\ \dots &= [m-1-m] = [m-1] = [m-1+m] = \dots \\ &\quad [m] \end{aligned}$$

disjunkte Vereinigung

Man erkennt (ohne Beweis): 1) $[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$

$$2) \mathbb{Z} = \bigsqcup_{z \in \mathbb{Z}} [z]$$