

Definition 1.4.5 (Umkehrrelation). Ist $R \subset A \times B$ eine Relation von A nach B , so ist durch

$$R^{-1} := \{(b, a) \in B \times A \mid aRb\}$$

eine Relation von B nach A , die sogenannte *Umkehrrelation* zu R , definiert.

Einschub 1.4.6. ...

Im Fall $A = B$ entsteht die Umkehrrelation durch Spiegelung der Relation an der Winkelhalbierenden.

Einschub 1.4.7. ...

1.4.1 Äquivalenzrelationen

Definition 1.4.8. Äquivalenzrelation Eine Relation $\sim$ auf einer Menge A (d.h. zwischen A und A) heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

Reflexivität Für alle $a \in A$ gilt: $a \sim a$

Symmetrie Für alle $a, b \in A$ gilt: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

Transitivität Für alle $a, b, c \in A$ gilt: $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Gilt $a \sim b$, so heißen a und b *äquivalent*.

Bemerkung 1.4.9. Die Äquivalenzrelation $\sim$ zerlegt die Grundmenge A in Teilmengen von A , die sogenannten *Äquivalenzklassen*, so dass jedes Element von A in genau einer der Äquivalenzklassen liegt. Die Äquivalenzklassen sind paarweise *disjunkt* (haben paarweise eine leere Schnittmenge) und ergeben als Vereinigung ganz A . Die Äquivalenzklasse von $a \in A$ notieren wir als

$$[a] := \{b \in A \mid b \sim a\}.$$

Beispiele 1.4.10. Sei $m \in \mathbb{N}, m > 1$. Auf $A = B = \mathbb{Z}$ definiert

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \text{ ist durch } m \text{ teilbar}$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind die *Restklassen modulo m* .

$m=4$

$$[1] = \{1 + k \cdot 4 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[0] = \{0 + k \cdot 4 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[2] = \{2 + k \cdot 4 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

teilen durch 4
Rest 1
Rest 0
Rest 2

$$\textcircled{3} = \{3+k \cdot 4 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -1, \underline{3}, 7, 11, \dots\}$$

Rest 3

$$\begin{aligned} [4] &= \{ \underbrace{4+k \cdot 4}_{=0+4(1+k)} \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{\dots, -4, \underline{0}, 4, 8, 12, \dots\} = [0] \\ &= \{0+4(1+k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Rest 4 $\stackrel{!}{=} \text{Rest } 0$

$$[5] = [1], \quad [6] = [2] = [10] = [14] = \dots$$

1 Beh $a \sim b \iff [a] = [b]$

2 Beh $a \sim b \iff a \text{ und } b \text{ lassen beim Teilen durch } m \text{ denselben Rest}$

1.4.2 Ordnungsrelationen

Definition 1.4.12. Eine Relation R auf einer Menge A heißt *Ordnungsrelation* oder *Halbordnung*, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

Reflexivität Für alle $a \in A$ gilt: aRa

Antisymmetrie Für alle $a, b \in A$ gilt: aRb und $bRa \Rightarrow a = b$

Transitivität Für alle $a, b, c \in A$ gilt: aRb und $bRc \Rightarrow aRc$

Erinnerung Symmetrie bei $\sim$

$$\forall x, y: x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$$

Eine Halbordnung R ist eine *totale Ordnung*, falls für alle $a, b \in A$ stets aRb oder bRa gilt.

Beispiele 1.4.13. Die Kleiner-Gleich-Relation $\leq$ auf $A = B = \mathbb{R}$ ist eine totale Ordnung. Die Teilmengen-Relation auf $\mathcal{P}(M)$ ist eine Halbordnung, die im Allgemeinen keine totale Ordnung ist.

Einschub 1.4.14. ... $M = \{1, 2, 3\}$, $R \subset \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$ ist die Teilmengenrelation auf $\mathcal{P}(M)$: für alle $A, B \in \mathcal{P}(M)$: $A \subset B$ (für $A, B \in \mathcal{P}(M)$)

reflexiv $A \in \mathcal{P}(M) \Rightarrow A \subset A \Rightarrow ARA$ ✓

antisymmetrisch ARB und $BRA \Rightarrow A \subset B$ und $B \subset A \Rightarrow A \subset B \subset A$ ✓

$\Rightarrow A = B$ ✓ transitiv $A \subset B$ und $B \subset C \Rightarrow A \subset B \subset C$
 $\Rightarrow A \subset C \Rightarrow ARC$ □

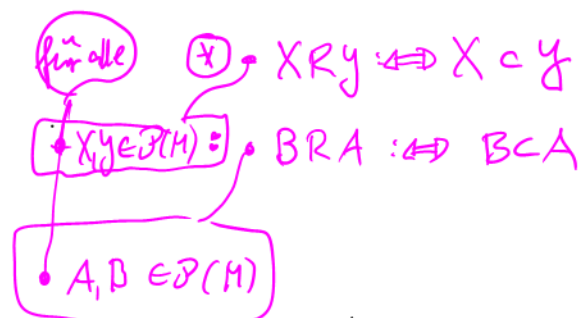
$A=B$ ^{Dfn} $A \subset B$ und $B \subset A$

aber für $\{1, 2\}, \{2, 3\} \in \mathcal{P}(M)$ gilt

$\{1, 2\} \not\subset \{2, 3\}$ und $\{2, 3\} \not\subset \{1, 2\}$

also sind $\{1, 2\}$ und $\{2, 3\}$ mit

der Teilmengenrelation " $\subset$ " nicht vergleichbar. Daher ist dies keine totale Ordnung.



1.4.3 Abbildungen, Funktionen

Abbildungen beziehungsweise Funktionen sind die mathematische Abstraktion eines *funktionalen Zusammenhangs*: Jedem Wert einer *unabhängigen* Größe wird genau ein Wert einer dann *abhängigen* Größe zugeordnet.

Die Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs kann erfolgen durch die Angabe eines Terms oder (partiell) durch eine Wertetabelle oder (geometrisch) durch Zeichnung des *Graphen* der Zuordnung, also derjenigen Punkte im $\mathbb{R}^2$, deren erste Koordinate die unabhängige Größe x und deren zweite Koordinate die x zugeordnete, abhängige Größe ist.

Beispiele 1.4.15.

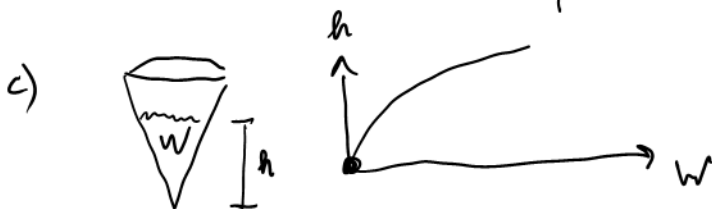
$$U(r) = 2\pi r$$

- Der Umfang U eines Kreises ist abhängig von seinem Radius r : $U = 2\pi r$.
- Der Bremsweg eines Autos hängt von der gefahrenen Geschwindigkeit ab.
- Die Füllhöhe eines kegelförmigen Glases hängt von der eingefüllten Wassermenge ab.
- Durch den Ausweis wird einer Person (unabhängige Größe) ihre Körpergröße (abhängige Größe) zugeordnet oder ihre Augenfarbe (abhängige Größe) zugeordnet (das bedeutet die Größen müssen nicht quantifizierbar sein).
- Durch den Börsenkurs wird Zeitpunkten der Kurswert einer Aktie zugeordnet (also auch bei quantifizierbaren Merkmalen muss der funktionale Zusammenhang nicht durch einen Term ausgedrückt werden können).

Einschub 1.4.16. ...

b)

v	10	15	20
$B(v)$	20	40	80



jedem W wird genau ein h zugeordnet



Definition 1.4.17. Seien A und B Mengen. Eine *Abbildung* von A nach B ist eine Relation $\Gamma \subset A \times B$ zwischen A und B , für die gilt:

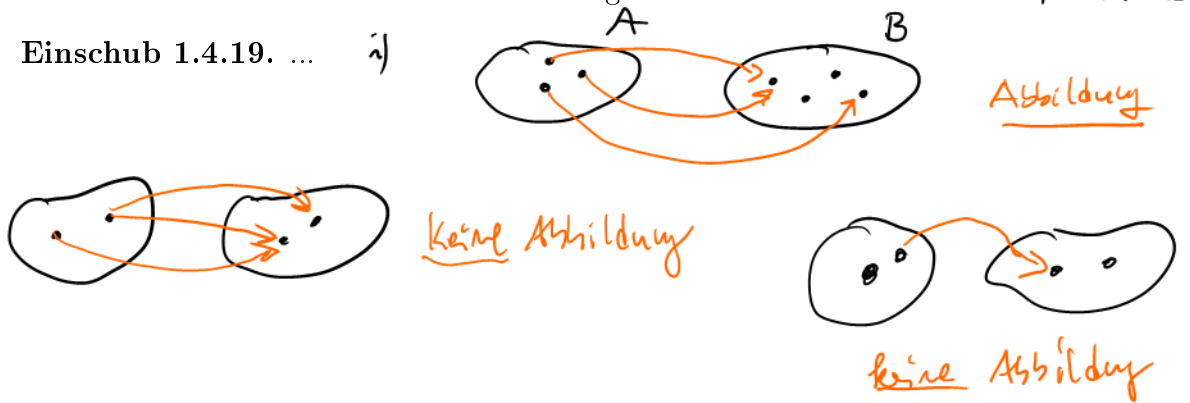
- Jedes Element aus A steht in Relation zu einem Element aus B , das bedeutet formal: zu jedem $a \in A$ existiert ein $b \in B$, so dass $(a, b) \in \Gamma$ gilt. $a \mapsto b$
- Jedes Element aus A steht in Relation zu höchstens einem Element aus B , das bedeutet formal: aus $(a, b) \in \Gamma$ und $(a, b') \in \Gamma$ folgt $b = b'$.

Die beiden Bedingungen der Definition lassen sich zu einer zusammenfassen: Jedes Element aus A steht in Relation zu genau einem Element aus B .

Beispiele 1.4.18.

- a. Der Graph eines funktionalen Zusammenhangs ist eine Abbildung. 
- b. Die Zuordnung, die einzelnen Studierenden das Geburtsdatum zuordnet, ist eine Abbildung.
- c. Die Teilerrelation auf $\mathbb{N}$ ist keine Abbildung.

Einschub 1.4.19. ... $\tilde{A}$



Notation 1.4.20. Üblicherweise notiert man Abbildungen $\Gamma \subset A \times B$ nicht als Teilmenge, sondern als Zuordnung

$$f : A \rightarrow B.$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B$$

Man sagt: „ f ist eine Abbildung von A nach B “ oder kurz „ f von A nach B “. Die Menge A heißt dann *Definitionsbereich* und B *Wertebereich*.

Statt $(x, y) \in \Gamma$ schreibt man

$$y = f(x).$$

Man nennt $f(x)$ den *Wert*, den die Zuordnung f dem *Argument* (erster Wert) $x \in A$ zuordnet. Man sagt: „ $f(x)$ ist das Bild von x unter f “.

Alternativ schreibt man auch

$$f : A \rightarrow B, \quad x \mapsto f(x).$$

Beachte der Pfeil $\rightarrow$ steht zwischen den Mengen, zwischen denen f abbildet, hingegen steht $\mapsto$ zwischen dem Element x und dem zugeordneten Funktionswert $f(x)$. Den Term „ $x \mapsto f(x)$ “ nennt man *Zuordnungsvorschrift*.

Die Menge

$$\Gamma = \Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

nennt man den *Graphen* von f .

Einschub 1.4.21. ...

$$j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto j(t) := t^2 + 1$$

$\uparrow$ Definitionsbereich $\uparrow$ Wertebereich

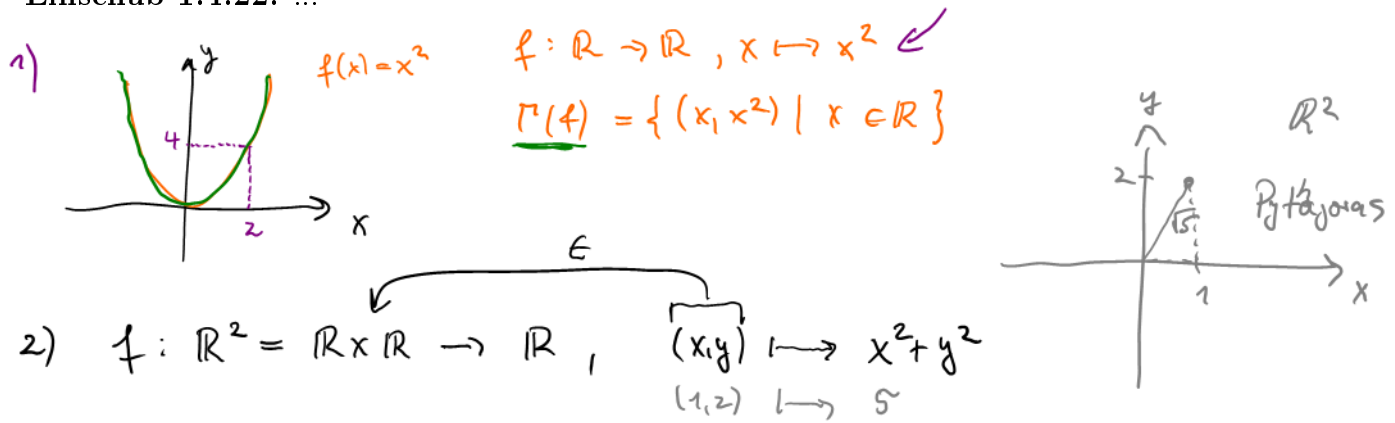
Zuordnungsvorschrift

Sind A und B Teilmengen der reellen Zahlen, so nennt man eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ eine *Funktion*.

1.4.4 (Graphische) Darstellungen von Funktionen

Die Angabe einer Funktion besteht aus Angabe des Definitionsbereichs und Wertebereichs und der Zuordnungsvorschrift. Funktionen können dadurch visualisiert werden, dass man ihren Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem markiert. Mithilfe von Computern (Tabellenkalkulationsprogrammen oder Funktionsplottern) kann man diese Visualisierungen und auch Wertetabellen leicht herstellen.

Einschub 1.4.22. ...



Wenn Definitions- und Wertebereich aus dem Zusammenhang ersichtlich sind, kann man Funktionen auch nur durch ihren *Funktionsterm* zum Beispiel $f(x) = x^2$ oder auch $y = x^2$ definieren.

1.4.5 Funktionen in mehreren Variablen

Eine Abbildung

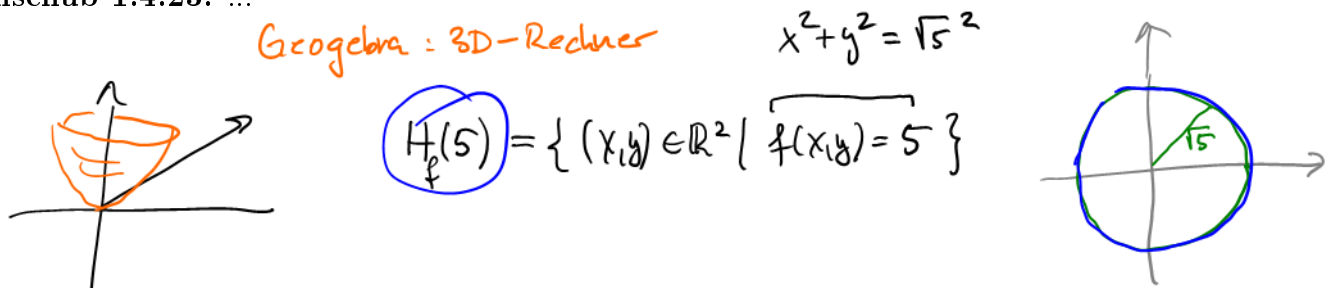
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

ordnet jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine reelle Zahl $f(x, y) \in \mathbb{R}$ zu, zum Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2$. Der Graph von f besteht dann aus einer Teilmenge des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$, nämlich:

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

In diesem Fall lässt sich der Graph $\Gamma(f)$ der Funktion f als eine „Fläche“ im Raum („Gebirge“) darstellen.

Einschub 1.4.23. ...



Den Graph von Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kann man in einem dreidimensionalen Koordinatensystem (wie oben) perspektivisch darstellen oder durch spezielle zweidimensionale Graphiken, sogenannte *Höhenlinien*:

Die Höhenlinie $H_f(c)$ von f zur Höhe c , sind alle Punkte der Ebene, deren Bild unter f gleich c ist, d.h.

$$H_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}.$$

Im Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2$ sind die Höhenlinien leer, falls $c < 0$ bzw. der Ursprung, falls $c = 0$ bzw. ein Kreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius $\sqrt{c}$, falls $c > 0$. Die Höhenlinie $H_f(c)$ ist der Schnitt des Graphen von f mit der Ebene im dreidimensionalen Raum, die durch die Gleichung $z = c$ beschrieben wird.

Einschub 1.4.24. ... Die Höhenlinien ergeben sich aus waagerechten Schnitten mit den 3-dimensionalen Funktionsgraphen

von Ebenen

