

1.4.6 Umkehrrelationen von Funktionen

Eine Funktion f ist eindeutig bestimmt durch ihren Graphen $\Gamma(f)$. Die Relation $\Gamma(f)$ besitzt eine *Umkehrrelation*

$$\Gamma(f)^{-1} := \{(f(x), x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Im Allgemeinen ist $\Gamma(f)^{-1}$ aber keine Funktion (wie z.B. für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$). Wenn die Umkehrrelation eine Funktion ist, so erhält man einen Funktionsterm für die Umkehrfunktion durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x .

Definition 1.4.25 (Umkehrfunktion). Es sei $f: A \rightarrow B$ eine Funktion. Die *Umkehrfunktion* $f^{-1}: B \rightarrow A$ ist diejenige Funktion, welche

a. $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$ und

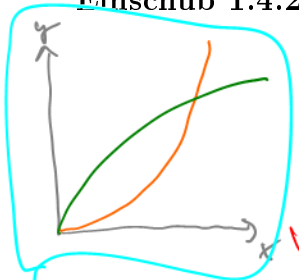
b. $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in B$

erfüllt.

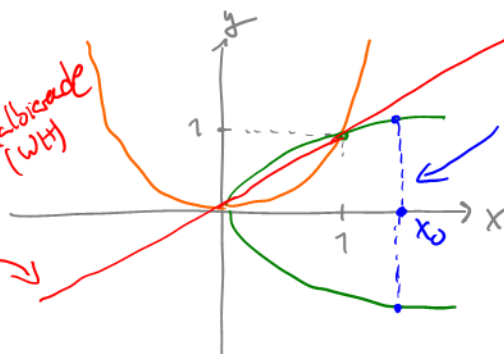
$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x \\ f(g(y)) &= y \end{aligned}$$

Einschub 1.4.26. ... $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, \Gamma(f) = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$\Gamma(f)^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$



Winkelhalbierende (WH)



$\Gamma(f)^{-1}$ ist keine Funktion, da es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, dem zwei y -Werte zugeordnet werden.

$\Gamma(f)^{-1}$ ergibt sich aus $\Gamma(f)$ durch Spiegelung an der WH (1.4.6)

aber: $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$ ist $\Gamma(f)^{-1}$ eine Funktion

Bemerkung 1.4.27. Nicht jede Funktion f hat eine Umkehrfunktion. Falls es eine gibt, nennt man sie wie in der Definition f^{-1} und sie erfüllt die Bedingungen der Definition. Wenn eine Funktion g die Bedingungen der Definition erfüllt, dann ist sie die Umkehrfunktion von f und man schreibt $g = f^{-1}$.

Beispiele 1.4.28. Der Umfang eines Kreises ist abhängig von dem Radius des Kreises:

$$U: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), U(r) := 2\pi r$$

Der Radius eines Kreises ist von dem Umfang des Kreises abhängig:

$$R: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), R(u) := \frac{u}{2\pi}$$

Hier gilt also $U = R^{-1}$ und $R = U^{-1}$.

Einschub 1.4.29. ...

$$R(U(r)) = R(2\pi r) = \frac{2\pi r}{2\pi} = r$$

$$U(R(u)) = U\left(\frac{u}{2\pi}\right) = 2\pi \cdot \frac{u}{2\pi} = u$$

$$U = 2\pi r$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{u}{2\pi}$$

Umstellen nach "r"

um Umkehrfunktion zu berechnen

Kapitel 2

Lineare Funktionen

Im Folgenden werden wir besondere Klassen von Funktionen für die Modellierung von funktionalen Zusammenhängen genauer untersuchen:

Definition 2.0.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *linear*, wenn es reelle Zahlen a und b gibt, so dass $f(x) = ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Im Spezialfall $a = 0$ heißt f *konstant*. Ist $b = 0$, so heißt f *proportional* oder *homogen-linear* und a *Proportionalitätsfaktor*. $f(x) = b$ $f(x) = ax \Rightarrow f(0) = 0$

Bemerkung 2.0.2. Konstante Funktionen beschreiben funktionale Zusammenhänge, in denen eine Veränderung der unabhängigen Größe x keine Veränderung der abhängigen Größe $f(x)$ bewirkt. Daher sind sie an sich eher uninteressant, werden aber zum Beispiel gebraucht, um ein solches Verhalten in Abgrenzung zu anderem Verhalten darzustellen (z.B. Flatrate-Gebühr versus Volumentarif beim Handy, Kosten für eine Dauerkarte für Sportveranstaltungen versus Kosten für einzelne Eintrittskarten).

2.1 Proportionale Funktionen

Satz 2.1.1. Für eine proportionale Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt für alle $r, x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

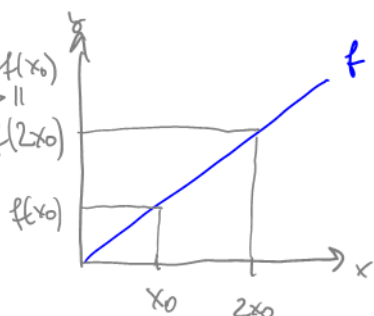
$$f(r \cdot x) \stackrel{\text{homogen}}{=} r \cdot f(x) \quad \text{und} \quad f(x_1 + x_2) \stackrel{\text{linear}}{=} f(x_1) + f(x_2).$$

Dem Doppelten, Dreifachen, r -fachen des Arguments wird also durch eine proportionale Funktion der doppelte, dreifache, r -fache Funktionswert zugeordnet. Geometrisch bedeutet diese Eigenschaft, dass die Punkte des Graphen einer proportionalen Funktion auf einer Ursprungsgeraden liegen.

Einschub 2.1.2. ...

1 Beh $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ 1 Bew Weil f proportional ist
gilt $f(x) = ax$. Also: $f(r \cdot x) \stackrel{\text{Defn}}{=} a \cdot (rx) \stackrel{\text{Asso}}{=} (ar)x$
nach Definition $\stackrel{\text{Kommutativ}}{=} (ra)x \stackrel{\text{Asso}}{=} r(ax) \stackrel{\text{Defn}}{=} r f(x)$

2 Beh $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 2 Bew $f(x_1 + x_2) =$
Vor $= a \cdot (x_1 + x_2) \stackrel{\text{Distr.}}{=} ax_1 + ax_2 \stackrel{\text{Defn}}{=} f(x_1) + f(x_2) \quad \square$

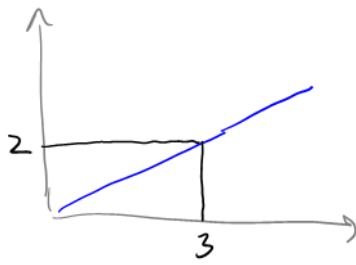


Beweisidee: Einsetzen in den Funktionsterm und Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz anwenden.

Folgerung 2.1.3. Kennt man von einer proportionalen Funktion f den Funktionswert an einer Stelle $x_0 \neq 0$, so kennt man alle Funktionswerte. Es gilt nämlich:

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot x,$$

Einschub 2.1.4. ... Beh $f(x) = \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot x$ Bew Sei $x_0 \neq 0$. Dann:
 $f(x_0) \stackrel{\text{Def}}{=} a x_0 \Rightarrow a = \frac{f(x_0)}{x_0} \Rightarrow f(x) \stackrel{\text{Def}}{=} a x = \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot x \quad \square$



Wissen
 $f(3)=2$ und f proportional $\Rightarrow x_0=3$,
 $a = \frac{f(x_0)}{x_0} = \frac{f(3)}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{f(3)}{3} \cdot x = \frac{2}{3}x$
 "Steigungsdreieck"

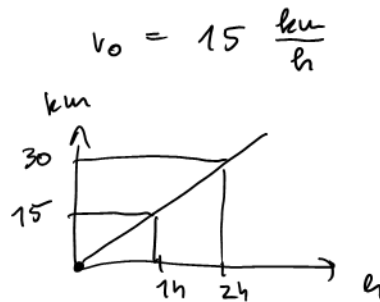
d.h. $a = \frac{f(x_0)}{x_0}$ ist der Proportionalitätsfaktor, insbesondere für $x_0 = 1$ also $a = f(1)$.

Obwohl Proportionalität eine der einfachsten funktionalen Zusammenhänge ist, hat sie zahlreiche Anwendungen:

Beispiele 2.1.5.

- Gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_0 : Sei $s(t)$ die zurückgelegte Strecke nach der Zeit t , dann gilt: $s(t) = v_0 \cdot t$.

Einschub 2.1.6. ...

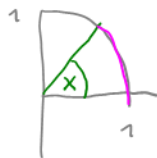


$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$
 $f(t) = v_0 \cdot t$

- Umrechnungen: Einheiten (Meter in Kilometer, Stunden in Sekunden, usw.), Wechselkurse, Grad in Bogenmaß bei Winkeln (Proportionalitätsfaktor ist hier $\frac{2\pi}{360}$), Maßstäbe bei Landkarten

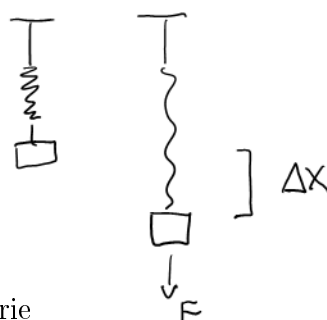
Einschub 2.1.7. ... 1) $1h \hat{=} 3600s$ $f(t) = \overset{=a}{3600}t$, $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

2) $x \text{ Grad} \hat{=} x \cdot \frac{2\pi}{360} \text{ Bogenmaß}$ $f(x) = x \cdot \underbrace{\frac{2\pi}{360}}_{=a}$



- Physikalische Gesetze, z.B. Ohmsches Gesetz, Hookesches Gesetz

Einschub 2.1.8. ...

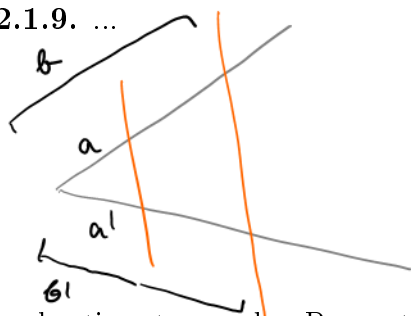


$F = D \cdot \Delta X$ $F(\Delta X) = D \cdot \Delta X$
 $\uparrow$ Kraft $\uparrow$ Federkonstante "a"

- Strahlensätze in Geometrie

Einschub 2.1.9. ...

1



$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad (\text{Strahlensatz})$$

$$\Rightarrow b = \frac{b'}{a'} \cdot a$$

$$f(a) = \left(\frac{b'}{a'} \right) \cdot a$$

Proportionalitätsfaktor

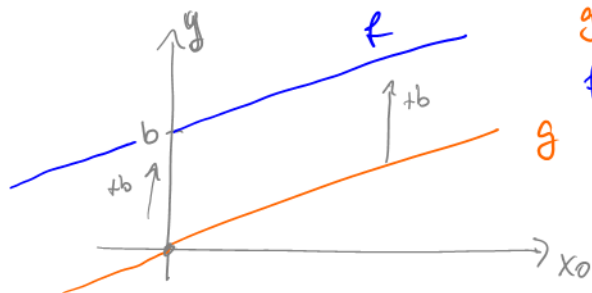
- Dreisatz (hier bestimmt man den Proportionalitätsfaktor häufig über den sogenannten *Schluss über die Eins.*)

2 siehe letzte Seite

2.2 Allgemeine lineare Funktionen

Die allgemeine lineare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ ergibt sich aus der zugehörigen proportionalen Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax$ durch Addition der Konstanten b , d.h. geometrisch, dass der Graph von f die um b Einheiten in y -Achsenrichtung verschobene Ursprungsgerade ist, die durch den Graphen von g gegeben ist. Man sagt, dass der Graph von f eine Gerade mit *Steigung* a und *y -Achsenabschnitt* b ist. Der Graph von f wird auch kurz mit der *Geradengleichung* $y = ax + b$ beschrieben.

Einschub 2.2.1. ...



$$g(x) = ax$$

Graph von f ergibt sich aus

$$f(x) = g(x) + b = ax + b$$

Graph von g durch

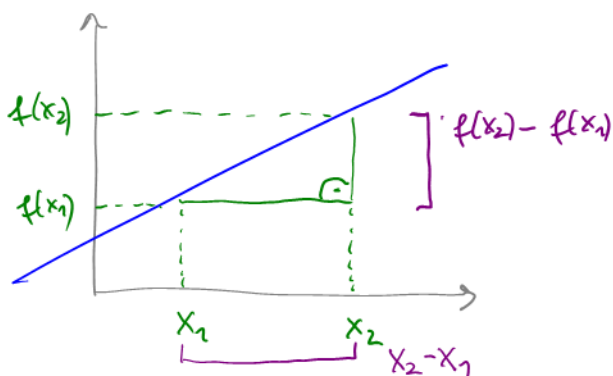
"Verschieben" um b Einheiten in y -Richtung "nach oben".

$f(0) = b$ heißt y -Achsenabschnitt von f *

Die wesentliche Eigenschaft von linearen Funktionen ist, dass für das *Steigungsdreieck* gilt:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a,$$

Einschub 2.2.2. ...



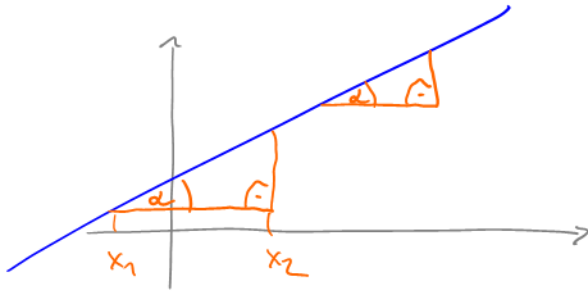
$$\text{Für } f: f(x) = ax + b$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

d.h. unabhängig von der Wahl der Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ ergibt der Quotient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, der die Änderung der Funktionswerte („Änderung in vertikaler Richtung“) ins Verhältnis zu der Änderung der Argumente („Änderung in horizontaler Richtung“) setzt, die Steigung a der linearen Funktion f (bzw. der Geraden zu $y = ax + b$). Geometrisch bedeutet dies, dass verschiedene Steigungsdreiecke an den Graphen von f ähnlich sind, d.h. dass sie insbesondere dieselben Winkel besitzen.

Einschub 2.2.3. ...



$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Taschenrechner $\alpha = \arctan(a)$

Für den Winkel α der Geraden gegenüber der Parallelen zur x -Achse gilt in jedem Steigungsdreieck

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \arctan a. ^1$$

2.3 Geradengleichungen zu linearen Funktionen mit gewünschten Eigenschaften

- Gerade mit Steigung a und y -Achsenabschnitt b :

$$y = ax + b$$

- Gerade mit Steigung a durch den Punkt (x_0, y_0) :

$$y = a(x - x_0) + y_0 = ax + (y_0 - ax_0) \quad (\text{Punkt-Steigungs-Form})$$

Einschub 2.3.1. ...

¹Für den Tangens eines Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Ankathete}}.$$

Mit $\arctan$ wird die Umkehrfunktion der Tangensfunktion bezeichnet.

- Gerade durch zwei Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1) + y_1 \quad (\text{Zwei-Punkte-Form}) \end{aligned}$$

Einschub 2.3.2. ...

2.4 Anwendung: Lineare Interpolation

Gegeben eine (beliebige) Funktion $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$, deren Werte an den Randstellen x_1 und x_2 bekannt sind (und deren sonstige Werte nicht oder nur mit großem Aufwand bestimmt werden können).

Einschub 2.4.1. ...

⊗ Eine allgemeine lineare Funktion ist nicht linear, denn Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 1, \quad f(4+6) = f(10) = 2 \cdot 10 + 1 = 21 \quad \neg \neq \\ f(4) + f(6) &= 2 \cdot 4 + 1 + 2 \cdot 6 + 1 = 9 + 13 = 22 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von Näherungswerten für die Funktionswerte von f auf (x_1, x_2) wird der Graph von f durch eine Gerade g ersetzt, die an den Randstellen von $[x_1, x_2]$ mit f übereinstimmt, d.h. gesucht ist $g : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit $g(x_1) = f(x_1)$ und $g(x_2) = f(x_2)$. Die Zwei-Punkte-Form liefert

$$g(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Für hinreichend „gutartige“ Funktionen f gilt dann $f(x) \approx g(x)$ für $x \in [x_1, x_2]$.

2.1.9. [2] Dreisatz 3kg Zwiebel kosten 4,5 €. Wieviel kosten 5kg?

3	4,5	<u>Annahme</u> Preis ist proportional zum Gewicht <u>Mit Formel</u> $P(z) = a \cdot z \stackrel{\text{Folg.}}{=} \frac{P(3)}{3} \cdot z = \frac{4,5}{3} \cdot z$ $= 1,5 \cdot z$
:3 ↓	↓	
1	4,5/3	
·5 ↓	↓	
5	4,5/3 · 5	