

Für den Winkel α der Geraden gegenüber der Parallelen zur x -Achse gilt in jedem Steigungsdreieck

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \arctan a. \quad ^1$$

2.3 Geradengleichungen zu linearen Funktionen mit gewünschten Eigenschaften

- Gerade mit Steigung a und y -Achsenabschnitt b :

$$y = ax + b = f(x)$$

- Gerade mit Steigung a durch den Punkt (x_0, y_0) :

$$y = a(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow ax + (y_0 - ax_0) \quad (\text{Punkt-Steigungs-Form})$$

Einschub 2.3.1. ... Gegeben ist (x_0, y_0) und Steigung a . Also gilt $y_0 = ax_0 + b$ durch Einsetzen von (x_0, y_0) in Geradengleichung. Damit: $b = y_0 - ax_0$. Einsetzen in $y = ax + b$ liefert:

$$y = ax + y_0 - ax_0 = a(x - x_0) + y_0$$

¹Für den Tangens eines Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Ankathete}}.$$

Mit $\arctan$ wird die Umkehrfunktion der Tangensfunktion bezeichnet.

- Gerade durch zwei Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$:

aus erster Formel durch Rollen tausch $(x_0, y_0) \leftrightarrow (x_1, y_1)$

$$f(x) = y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 \stackrel{!}{=} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1) + y_1$$

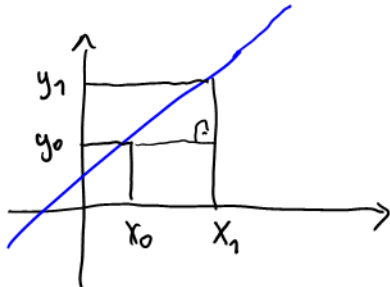
Einschub 2.3.2. ...

Steigung $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ y-Achsenabschnitt $\frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$$

(Zwei-Punkte-Form)

Berechne Steigung a aus "Steigungsdreieck":



$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

(Punkt-Steigungsformel s. oben)

$$\begin{aligned} &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x_0 + y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{-(y_1 - y_0)x_0 + y_0(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{-y_1 x_0 + y_0 x_0 + y_0 x_1 - y_0 x_0}{x_1 - x_0} \quad \square \end{aligned}$$

ausgelassen

2.4 Anwendung: Lineare Interpolation

Gegeben eine (beliebige) Funktion $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$, deren Werte an den Randstellen x_1 und x_2 bekannt sind (und deren sonstige Werte nicht oder nur mit großem Aufwand bestimmt werden können).

Einschub 2.4.1. ...

Zur Bestimmung von Näherungswerten für die Funktionswerte von f auf (x_1, x_2) wird der Graph von f durch eine Gerade g ersetzt, die an den Randstellen von $[x_1, x_2]$ mit f übereinstimmt, d.h. gesucht ist $g : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ linear mit $g(x_1) = f(x_1)$ und $g(x_2) = f(x_2)$. Die Zwei-Punkte-Form liefert

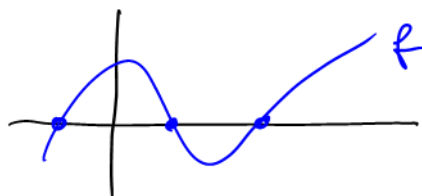
$$g(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Für hinreichend „gutartige“ Funktionen f gilt dann $f(x) \approx g(x)$ für $x \in [x_1, x_2]$.

2.5 Nullstellen

Definition 2.5.1. Eine Stelle x_0 in der Definitionsmenge einer Funktion f heißt *Nullstelle* von f , falls $f(x_0) = 0$ gilt.

Einschub 2.5.2. ...



Bei linearen Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b$$

unterscheiden wir die Fälle:

1. Fall: $a = 0$:

Die konstante Funktion f mit $f(x) = b$ besitzt keine Nullstelle, wenn $b \neq 0$. Falls $b = 0$, also f die Nullfunktion ist, ist jede Stelle der Definitionsmenge eine Nullstelle.

2. Fall: $a \neq 0$:

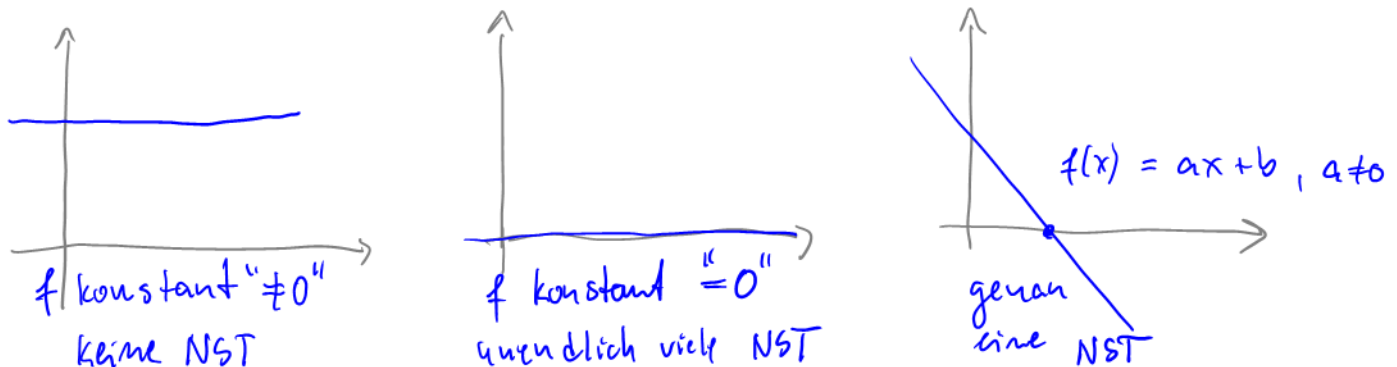
Für eine Nullstelle x_0 von f gilt:

$$f(x_0) = 0, \text{ also } \underline{ax_0 + b = 0} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{a},$$

d.h. es gibt genau eine Nullstelle ~~von~~ von f .

Einschub 2.5.3. ...

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$



2.6 Umkehrfunktion

Es sei f eine lineare Funktion. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

$$f(x) = ax + b$$

1. Fall: $a = 0$:

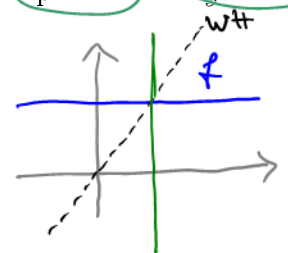
Der Graph der konstanten Funktion f mit $f(x) = b$ ist eine Parallele zur x -Achse. Der Graph der Umkehrrelation entsteht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden, ist daher eine Gerade parallel zur y -Achse und somit keine Funktion. Folglich besitzt f in diesem Fall keine Umkehrfunktion.

2. Fall: $a \neq 0$:

Löst man die Geradengleichung $y = ax + b$ nach x auf, so erhält man

$$y = ax + b \Leftrightarrow y - b = ax \Leftrightarrow \frac{y-b}{a} = x$$

$$x = \frac{y-b}{a} = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} = f^{-1}(y)$$



Die Umkehrrelation von f ist also eine Funktion, nämlich die lineare Funktion

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$$

Einschub 2.6.1. ...

$$f(x) = \overset{=a}{-4}x + \overset{=b}{16}, \quad y = -4x + 16 \Leftrightarrow y - 16 = -4x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-16}{-4} = -\frac{1}{4}y + 4 \quad \text{Nun Variablen tauschen, liefert:}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 4 \quad \text{also} \quad f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + 4$$

oder mit Formel ablesen: $f^{-1}(y) = \frac{1}{-4}y - \frac{16}{-4} = -\frac{1}{4}y + 4$

2.7 Monotonie

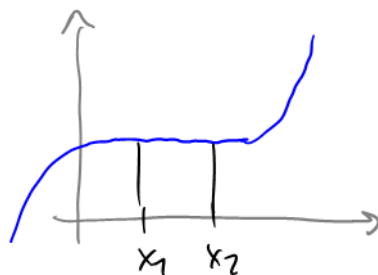
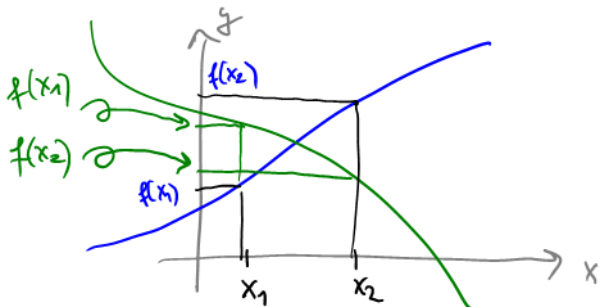
Definition 2.7.1 (Monotonie). Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*), falls

für alle $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

Sie heißt *monoton wachsend* (bzw. *fallend*), falls

für alle $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Einschub 2.7.2. ...



§ monoton wachsend
aber nicht streng
monoton wachsend

denn hier $f(x_1) = f(x_2)$

Folgerung 2.7.3. Für eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ gilt:

$a > 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend

$a < 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend

Einschub 2.7.4. ...

Beispiel $f(x) = 2x - 5$, $a = 2 > 0$ Beh f streng

monoton wachsend Bew Seien dazu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$. Zu

zeigen ist: $f(x_1) < f(x_2)$. Also $f(x_1) = 2x_1 - 5 < 2x_2 - 5 = f(x_2)$

Also gezeigt: $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$

$\Rightarrow 2x_1 - 5 < 2x_2 - 5$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \square$

$\Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2$

$\Leftrightarrow x_1 < x_2$

"Schwierig-
zeile"

Also allgemein Beh $a < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend

Bew Sei $x_1 < x_2$. Zu zeigen: $f(x_1) > f(x_2)$. Also: $x_1 < x_2$

$\xRightarrow{a < 0} ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \square$

2.8 Gemeinsame Punkte von Geraden.

Seien f und g lineare Funktionen mit $f(x) = ax + b$ und $g(x) = a'x + b'$. Zur Bestimmung gemeinsamer Punkte der zugehörigen Graphen suchen wir alle Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = g(x_0)$. Dazu suchen wir Nullstellen der Funktion $h := f - g$, d.h. der Funktion mit $h(x) = f(x) - g(x)$, denn es gilt $f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow (f - g)(x_0) = 0$.

Einschub 2.8.1. ...

Gesucht sind $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = g(x_0)$.

Definiere Hilfsfunktion $h(x) := f(x) - g(x)$. Dann hat man: x_0 gesuchte gemeinsame Stelle von

$$f \text{ und } g \Leftrightarrow h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \text{ ist NST von } h$$

$$\begin{aligned} \text{h berechnen: } h(x) &= ax+b - (a'x+b') \\ &= \underbrace{(a-a')}_{=A} x + \underbrace{(b-b')}_{=B} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ also ist h lineare Funktion

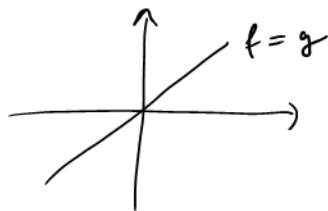
Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $h = f - g$ ist die Nullfunktion, d.h. $f=g$:

Die beiden Geraden stimmen überein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = a'$ und $b = b'$.

Einschub 2.8.2. ... $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 = h(x) = f(x) - g(x)$

für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ für alle $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = g(x)$. Also ∞ -viele gemeinsame Punkte



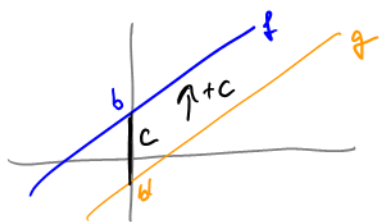
2. Fall: $h = f - g$ ist konstant, aber nicht die Nullfunktion:

In diesem Fall existiert ein $c \neq 0$ mit $h(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = a'$ und $b \neq b'$. Hier gibt es keinen Schnittpunkt, da $f - g$ als konstante Funktion ungleich Null keine Nullstelle hat. Die zugehörigen Geraden sind also parallel.

Einschub 2.8.3. ... Für alle $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = c \neq 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = c$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= g(x) + c \Leftrightarrow ax + b = a'x + b' + c \Leftrightarrow (a-a')x = \\ &= b' - b + c \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow a = a'$ und $b = b' + c$



3. Fall: $h = f - g$ ist nicht konstant:

Da $f - g$ offensichtlich wieder eine lineare Funktion ist (mit $h(x) = (a - a')x + (b - b')$), gibt es dann genau eine Nullstelle x_0 von $h = f - g$, d.h. genau einen Schnittpunkt von f und g , nämlich

$$(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0)) = \left(-\frac{b-b'}{a-a'}, -\frac{b-b'}{a-a'}a + b \right).$$