

Einschub 2.8.4. ... h ist nicht konstant, daher gibt es genau eine NST

von h , nämlich: $x_0 = -\frac{B}{A}$ ($A \neq 0$, denn h nicht konstant)

$$= -\frac{b-b'}{a-a'} = \frac{b'-b}{a-a'} \quad \text{und} \quad f(x_0) = a \cdot \frac{b'-b}{a-a'} + b = g(x_0)$$

$$= a' \cdot \frac{b'-b}{a-a'} + b' \quad \text{Daher: } (x_0, f(x_0)) \text{ ist gesuchter Schnittpunkt}$$

Beispiel $f_1(x) = -2x + 3$, $f_2(x) = -2x$, $f_3(x) = x - 1$
 $= a_1x + b_1$ $= a_2x + b_2$ $= a_3x + b_3$

$$a_1 = a_2, b_1 \neq b_2 \Rightarrow f_2 \text{ parallel zu } f_1$$

$$a_2 \neq a_3 \Rightarrow \text{genau ein Schnittpunkt } x_0 = \frac{b_3 - b_2}{a_2 - a_3} = \frac{-1 - 0}{-2 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{und } f_2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \quad \text{also } \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \text{ ist Schnittpunkt}$$

Direkt $f_2(x) = f_3(x) \Leftrightarrow -2x_0 = x_0 - 1 \Leftrightarrow 3x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{3}$

Anwendungsbeispiel

Die Städte Bielefeld und Hannover sind ca. 100 km voneinander entfernt. Ein IC fährt von Hannover nach Berlin mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 km/h. Gleichzeitig startet in Bielefeld ein ICE, der über Hannover nach Berlin mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 130 km/h fährt. Offensichtlich holt der ICE den IC irgendwann ein. Den Zeitpunkt t_0 und den Ort s_0 (angegeben als Entfernung von Bielefeld) des Einholens bestimmt man wie folgt: Für die Weg-Zeit-Gesetze s_{IC} und s_{ICE} der beiden Züge gilt: $s_{IC}(t) = 80t + 100$ und $s_{ICE}(t) = 130t$. Entsprechend ist t_0 gegeben durch $s_{IC}(t_0) = s_{ICE}(t_0)$, d.h. $t_0 = 2$ und somit $s_0 = s_{ICE}(t_0) = 260$.

Einschub 2.8.5. ...

$$s_{IC}(t) = 100 + 90t, \quad s_{ICE}(t) = 130t + 0$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{100 - 0}{130 - 90} = \frac{100}{40} = 2.5 \quad \text{also Treffpunkt nach 2.5 h}$$

$$\text{am Ort } s_{ICE}(2.5) = 130 \cdot 2.5 = 260 + 65 = 325.$$

Frage wie weit ist es von BI nach B?



2.9 Stückweise lineare Funktionen

Eine Funktion f kann *abschnittsweise* definiert sein. In diesem Fall gibt es eine Zerlegung des Definitionsbereichs in paarweise disjunkte Teilmengen $I_1, I_2, \dots$ (d.h. $I_m \cap I_n = \emptyset$, falls $m \neq n$) und Funktionen $f_n : I_n \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1$ mit

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{falls } x \in I_1, \\ f_2(x), & \text{falls } x \in I_2, \\ f_3(x), & \text{falls } x \in I_3, \\ \vdots & \text{falls } x \in I_4, \end{cases}$$

b) aus Punkt-Skigungs-Formel berechnen:

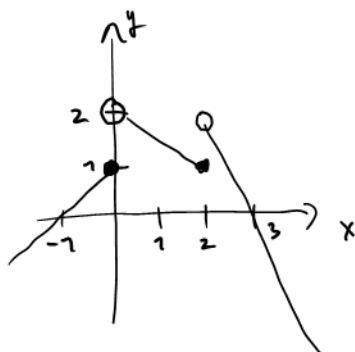
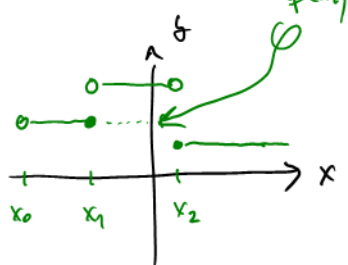
$$y = ax + y_0 - ax_0$$
$$= -2x + 0 - (-2) \cdot 3 =$$
$$\uparrow \quad \quad \quad = -2x + 6$$

$(x_0, y_0) = (3, 0)$ Punkt von Graph f

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & : x \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x+2 & : 0 < x \leq 2 \\ -2x+6 & : 2 < x \end{cases}$$

$$b = b$$

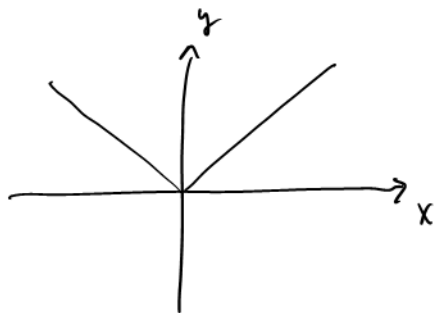
Einschub 2.9.1. ... $\rho(x_1)$



Sind für $n \geq 1$ die Zerlegungsmengen I_n Intervalle und die Funktionen $f_n : I_n \rightarrow \mathbb{R}$ linear (bzw. konstant), so heißt f *stückweise linear* (bzw. *stückweise konstant*). Stückweise konstante Funktionen heißen auch *Treppenfunktionen*. Stückweise lineare (bzw. konstante) Funktionen kommen bei der Modellierung von funktionalen Zusammenhängen häufiger vor, z.B. bei der Beschreibung von Mietverträgen mit Grundgebühr und Freikilometern oder von Telefongebühren bei Abrechnung je angefangener Minute. Weitere Beispiele für stückweise lineare Funktionen sind die *Betragsfunktion*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

Einschub 2.9.2. ...



und die *Vorzeichenfunktion*

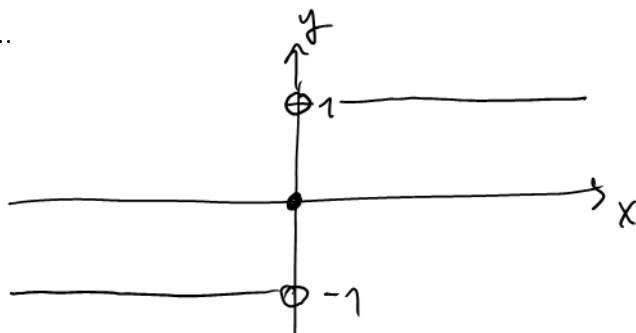
$$\operatorname{sgn}:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\text{ mit }\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1, & \text{falls } x>0, \\ 0, & \text{falls } x=0, \\ -1, & \text{falls } x<0. \end{cases}$$

Signum-Funktion

112

"Vorzeichen"-Funktion

Einschub 2.9.3. ...



$$\text{sign}(-7) = -1$$

$$\text{sign}(0) = 0$$

2.10 Lineares Skalieren

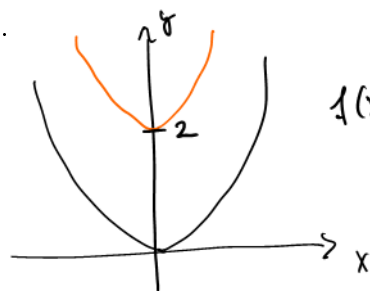
Verschieben, Vergrößern oder Verkleinern des Graphen einer Funktion f in x - oder y -Achsenrichtung bewirken zwar quantitative Veränderungen, qualitative Eigenschaften des Graphen bleiben im Wesentlichen aber erhalten. D.h. bei der Modellierung von funktionalen Zusammenhängen können diese Manipulationen des Graphen zur Anpassung an die Anwendungssituation genutzt werden, ohne dass die qualitativen Eigenschaften des gewählten, beschreibenden Funktionstyps verloren gehen. Die genannten Modifikationen erhält man durch *lineares Skalieren* und zwar in der folgenden Weise:

Vertikales Verschieben. Die

$$\text{Ersetzung von } f(x) \text{ durch } f(x) + b =: g(x)$$

für eine Konstante b bewirkt eine Verschiebung des Graphen von f um b Einheiten, und zwar nach oben (in y -Richtung), falls $b > 0$ und nach unten, falls $b < 0$ ist.

Einschub 2.10.1. ...



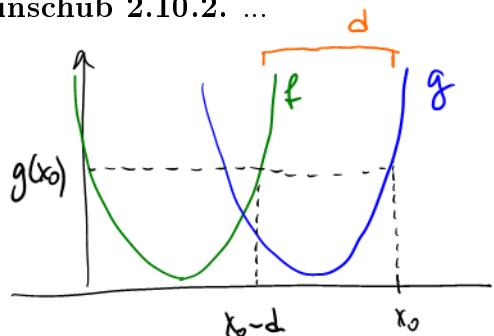
$$f(x) = x^2, \quad g(x) = f(x) + 2 = x^2 + 2$$

Horizontales Verschieben. Die

$$\text{Ersetzung von } f(x) \text{ durch } f(x - d) \text{ für eine Konstante } d$$

bewirkt eine Verschiebung des Graphen von f um d Einheiten, und zwar nach rechts (in x -Richtung), falls $d > 0$ und nach links, falls $d < 0$ ist.

Einschub 2.10.2. ...



Der Wert von g an der Stelle x_0 entspricht dem Wert von f an der Stelle $x_0 - d$, also

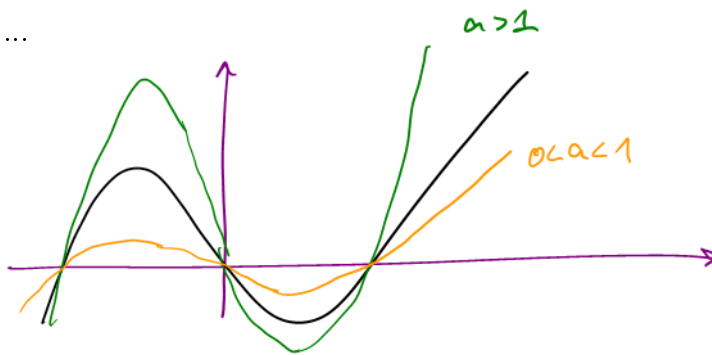
$$g(x) = f(x - d) \quad \text{Beispiel } f(x) = x^2, d = 2, \\ \text{verschieben von } f \text{ um 2 Einh. nach rechts: } g(x) = f(x - 2) = (x - 2)^2$$

Vertikales Strecken oder Stauchen (Änderung der Amplitude). Die

$$\text{Ersetzung von } f(x) \text{ durch } a \cdot f(x)$$

für eine Konstante $a \neq 0$ bewirkt eine Streckung des Graphen in y -Richtung, falls $a > 1$, eine Stauchung des Graphen in y -Richtung, falls $0 < a < 1$ und, falls $a < 0$, eine Streckung oder Stauchung in y -Richtung um den Faktor $|a|$ bei gleichzeitiger Spiegelung des Graphen an der x -Achse.

Einschub 2.10.3. ...

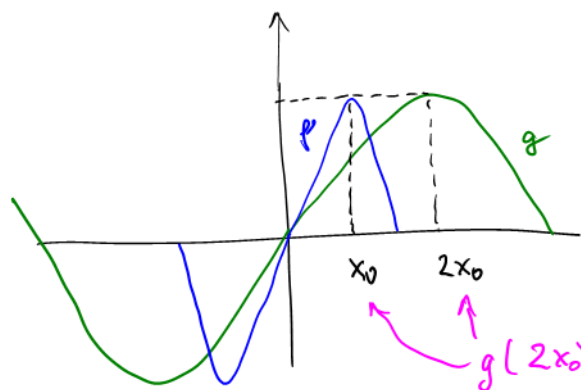


Horizontales Strecken oder Stauchen (Änderung der Frequenz). Die

Ersetzung von $f(x)$ durch $f(c \cdot x)$

für eine Konstante $c \neq 0$ bewirkt eine Stauchung des Graphen in x -Richtung, falls $c > 1$, eine Streckung des Graphen in x -Richtung, falls $0 < c < 1$ und, falls $c < 0$, eine Streckung oder Stauchung in x -Richtung um den Faktor $|c|$ bei gleichzeitiger Spiegelung des Graphen an der y -Achse.

Einschub 2.10.4. ...



Ersetzen von $f(x)$ durch

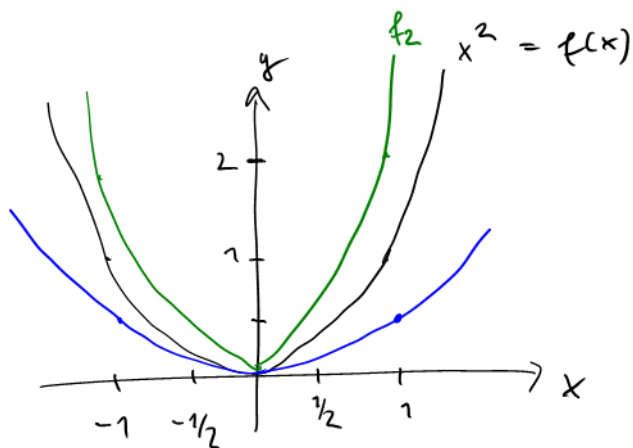
$f(\frac{1}{2}x) \leadsto$ Streckung von f
um Faktor $\frac{1}{2}$

$$\leadsto g(x) = f(\frac{1}{2}x)$$

$$g(2x_0) = f(\frac{1}{2} \cdot 2x_0) = f(x_0)$$

Bei der Normalparabel, dem Graphen zu $x \mapsto x^2$, bewirkt die horizontale Streckung oder Stauchung um $c > 0$ denselben Effekt wie das vertikale Strecken oder Stauchen um den Faktor c^2 . Daher kann man die Unterschiede der Amplituden- und Frequenzänderung bei dieser Funktion nicht gut studieren. Hier sind periodische Funktionen, wie z.B. die Sinusfunktion, besser geeignet.

Einschub 2.10.5. ...



$$f_1(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$$

Stauchung mit
 $c=2$
von f_1

$$f_2(x) = f_1(\underline{2x})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4x^2 = 2x^2$$

$$= 4 \cdot f_1(x)$$

f_2 geht aus f_1 durch horizontales Stauchen mit Faktor 2 hervor

f_2 geht aus f_1 durch vertikales Strecken mit Faktor 4 hervor