

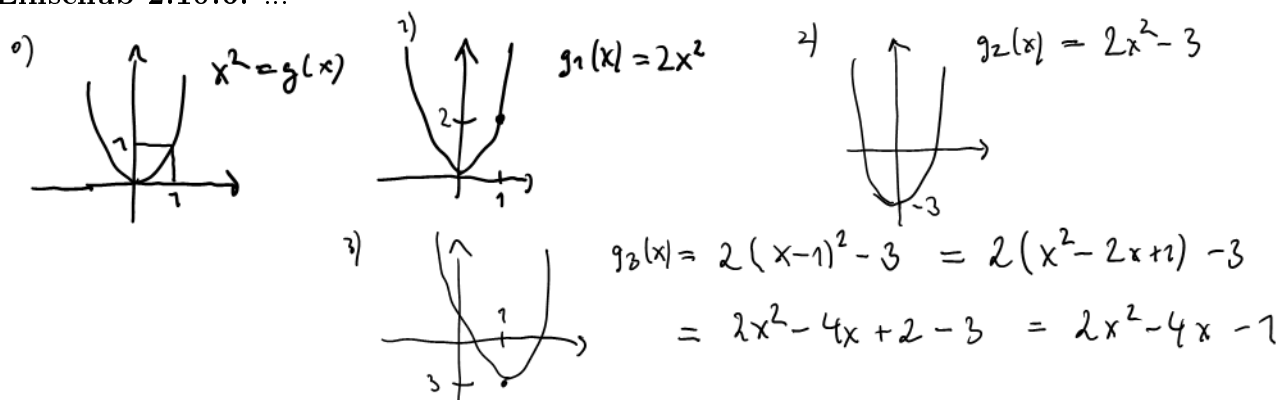
Diese vier Operationen lassen sich zu einer allgemeinen linearen Umskalierung zusammenfassen. So bewirkt die Ersetzung von

$$f(x) \quad \text{durch} \quad a \cdot f(c \cdot (x - d)) + b$$

- eine Streckung oder Stauchung des Graphen von f in x -Richtung um den Faktor c
- eine Streckung oder Stauchung des Graphen von f in y -Richtung um den Faktor a
- eine Verschiebung des Graphen um d Einheiten in x -Richtung und b Einheiten in y -Richtung.

Es ist hierbei zu beachten, dass die Reihenfolge der vorgenommenen Operationen wesentlich ist, d.h. vertauscht man die Reihenfolge der Manipulationen, so kann das zu unterschiedlichen Funktionen führen, wie z.B. beim Vertauschen von Verschieben und Strecken/Stauchen.

Einschub 2.10.6. ...



Beispiele 2.10.7. Betrachte die Funktion $f(x) = x^2$ und die folgenden Manipulationen des Funktionsgraphen:

1. Verschiebung um 3 Einheiten in x -Richtung
2. Verschiebung um 4 Einheiten entgegen der y -Richtung
3. Vertikale Streckung um den Faktor 2 und Spiegelung an der x -Achse

Führt man die Manipulationen in der Reihenfolge 1 - 2 - 3 durch, so erhält man die Funktion g_1 mit

$$g_1(x) = -2((x-3)^2 - 4) = -2x^2 + 12x - 10.$$

Führt man die Manipulationen in der Reihenfolge 3 - 2 - 1 durch, so erhält man die Funktion g_2 mit

$$g_2(x) = -2(x-3)^2 - 4 = -2x^2 + 12x - 22 \neq g_1(x).$$

Kapitel 3

Quadratische Funktionen

Definition 3.0.1. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *quadratische Funktion*, wenn es reelle Zahlen a, b und c gibt mit $a \neq 0$, so dass gilt:

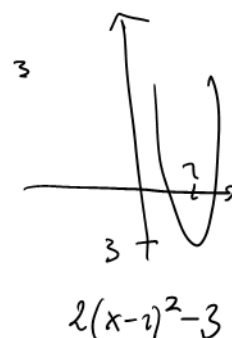
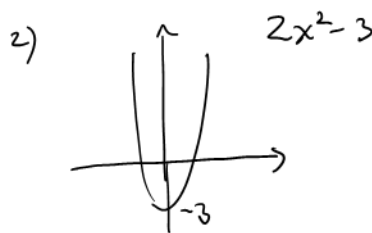
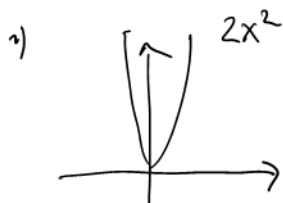
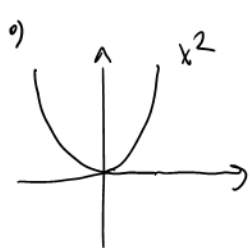
$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 3.0.2. Im Spezialfall $a = 1, b = c = 0$ erhält man $f(x) = x^2$. Der zugehörige Graph zu dieser Funktion heißt *Normalparabel*. Der Punkt $(0, 0)$ ist der *Scheitelpunkt* der Normalparabel. Mit quadratischer Ergänzung zeigt man, dass

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c \right)$$

gilt.

Einschub 3.0.3. ...



$$g(x) = 2(x-1)^2 - 3 = \underbrace{2x^2}_{=a} - \underbrace{4x}_{=b} - \underbrace{1}_{=c}$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{-4}{4} = -1, \quad c - \frac{b^2}{4a} = -1 - \frac{(-4)^2}{8} = -1 - 2 = -3$$

Einschub 3.04 Methode Quadratische Ergänzung

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 5 = ax^2 + bx + c$$

1) Vorfaktor von x^2 ausklammern

$$f(x) = 2 \left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \right) \quad \left| \quad \begin{array}{l} a \neq 0 \\ \downarrow \\ f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \end{array} \right.$$

2) Binomische Formel anwenden:

Einschub 3.0.4. ...

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot a + b^2$$

$\uparrow$ $\frac{1}{2}$ $\uparrow$
 x^2 $3/2$ x

$\leadsto b = \frac{3}{4}$

$$f(x) = 2 \left(x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{2} \right)$$

$$f(x) = 2 \left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{40}{16} \right)$$

$$= 2 \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{31}{8}$$

$$f(x) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Der Graph der allgemeinen quadratischen Funktion geht also aus der Normalparabel durch lineares Skalieren hervor, nämlich durch

- Streckung der Normalparabel in y -Richtung um den Faktor a und
- Verschiebung der gestreckten Parabel in horizontaler Richtung um $-\frac{b}{2a}$ und
- in vertikaler Richtung um $-\frac{b^2}{4a} + c$.

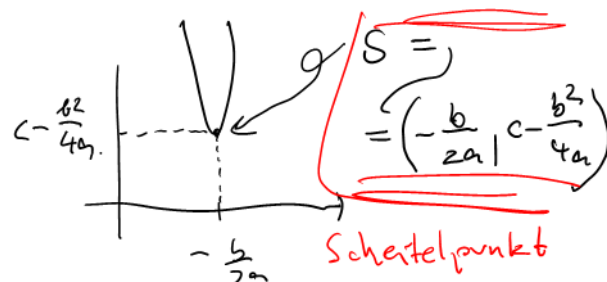
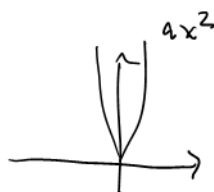
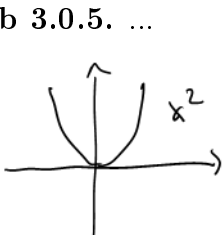
Die Darstellung der Funktion wie auf der rechten Seite der obigen Gleichung, also in der Form

$$f(x) = a(x - d)^2 + e$$

$$d := -\frac{b}{2a}, \quad e := c - \frac{b^2}{4a}$$

heißt **Scheitelpunktsform**. An der Scheitelpunktsform von f kann man Gestalt und Lage des Graphen zu f sofort ablesen: Es handelt sich um eine um den Faktor a gestreckte Normalparabel, deren Scheitelpunkt in den Punkt (d, e) verschoben wurde.

Einschub 3.0.5. ...



3.1 Nullstellen

Die Suche nach Nullstellen quadratischer Funktionen führt sofort auf quadratische Gleichungen, also Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

(Eine allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c' = d$ lässt sich durch Subtraktion von d in die Form $ax^2 + bx + c = 0$ überführen.)

Zur Lösung dieser Gleichung betrachten wir zunächst die (rein) quadratische Gleichung

$$x^2 = r$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \vee x = -3$$

Ist $r > 0$, so besitzt diese Gleichung zwei Lösungen. Die positive Lösung bezeichnen wir mit $\sqrt{r}$. Der Nachweis der Existenz folgt später. Die Tatsache, dass es genau zwei Lösungen gibt, folgt mithilfe der 3. Binomischen Formel:

$$x^2 = r \Leftrightarrow x^2 - r = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{r}^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{r})(x + \sqrt{r}) = 0 \quad \text{d.h. } (\sqrt{r})^2 = r$$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Da ein Produkt reeller Zahlen genau dann Null ist, wenn einer der beiden Faktoren Null ist, ist dies äquivalent zu

$$x - \sqrt{r} = 0 \quad \text{oder} \quad x + \sqrt{r} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{r} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{r},$$

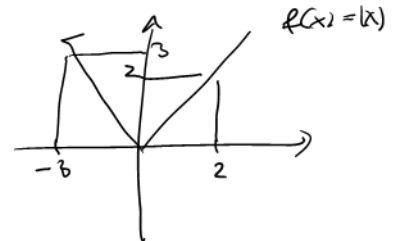
d.h. die Gleichung $x^2 = r$ besitzt die Lösungen $x = \pm\sqrt{r}$.

Ist $r = 0$, so ist $x = 0$ die einzige Lösung der Gleichung $x^2 = 0$. Wir setzen daher $\sqrt{0} = 0$.

Ist $r < 0$, so besitzt die Gleichung $x^2 = r$ keine reelle Lösung, da Quadrate reeller Zahlen immer größer gleich Null sind.

Für $r \geq 0$ gilt also die folgende Äquivalenz:

$$x^2 = r \Leftrightarrow |x| = \sqrt{r} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{r}.$$



Einschub 3.1.1. ...

Achtung $\sqrt{r^2} = |r|$, $r=3 \quad \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 = |r|$

$r=-2 \quad \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |r|$

$|2| = 2, |-3| = 3$

Es gilt $r^2 = s^2 \Leftrightarrow |r| = |s| \Leftrightarrow r = s \text{ oder } r = -s$

Betrachtet man nun die allgemeine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

so kann diese durch quadratisches Ergänzen äquivalent in Scheitelpunktsform überführt werden:

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c \right) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{1}{a} \left(\frac{b^2}{4a} - c \right).$$

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = - \left(-\frac{b^2}{4a} + c \right)$$

$\Leftrightarrow a \neq 0$

$(\dots)^2 = \dots$

Diese Gleichung hat nach den vorangehenden Überlegungen zu rein quadratischen Gleichungen – hier für den Ausdruck $\left(x + \frac{b}{2a} \right)$ – genau die Lösungen

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

? bleibt auszurechnen

Einschub 3.1.2. ...

$$\pm \sqrt{\frac{1}{a} \left(\frac{b^2}{4a} - c \right)} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Satz 3.1.3. Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ besitzt

- für $b^2 - 4ac > 0$ genau zwei reelle Lösungen, nämlich

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

- für $b^2 - 4ac = 0$ genau eine reelle Lösung, nämlich $x = \frac{-b}{2a}$,
- für $b^2 - 4ac < 0$ keine reelle Lösung.

Die Größe

$$D := b^2 - 4ac,$$

die über die Anzahl reeller Lösungen einer quadratischen Gleichung entscheidet, heißt Diskriminante der Gleichung.

Einschub 3.1.4. ...

Ist die Gleichung *normiert*, d.h. gilt $a = 1$, so liefert der Satz die sogenannte *p-q-Formel*:

Folgerung 3.1.5. Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ besitzt

- für $p^2 > -4q$ genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Einschub 3.1.6. ...