

Einschub 3.1.2. ...
$$= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

$a = -3$
 $\sqrt{(-3)^2} = 3 = |-3|$
 $\sqrt{3^2} = 3 = |3|$
 $a = 3$

$$= \begin{cases} \underline{a > 0} & -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1}{2a} (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) \\ \underline{a < 0} & -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1}{2a} (-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}) \end{cases}$$

□

$|a| = \begin{cases} a : a > 0 \\ -a : a < 0 \end{cases}$

Satz 3.1.3. Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ besitzt

- für $b^2 - 4ac > 0$ genau zwei reelle Lösungen, nämlich

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

- für $b^2 - 4ac = 0$ genau eine reelle Lösung, nämlich $x = \frac{-b}{2a}$,
- für $b^2 - 4ac < 0$ keine reelle Lösung.

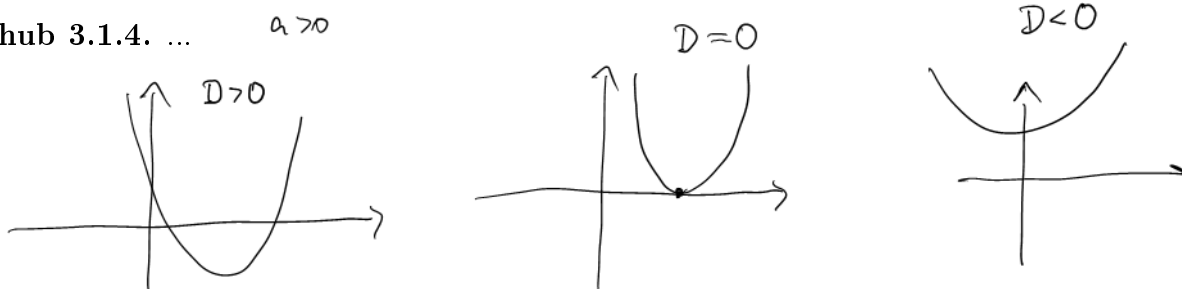
"abc-Formel"

Die Größe

$$D := b^2 - 4ac,$$

die über die Anzahl reeller Lösungen einer quadratischen Gleichung entscheidet, heißt **Diskriminante** der Gleichung.

Einschub 3.1.4. ... $a > 0$



Ist die Gleichung *normiert*, d.h. gilt $a = 1$, so liefert der Satz die sogenannte *p-q-Formel*:

(lässt sich immer erreichen indem man durch a ($a \neq 0$) teilt)

Folgerung 3.1.5. Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ besitzt

- für $p^2 > -4q$ genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Einschub 3.1.6. ... $x^2 + px + q = 0$, $a = 1$, $b = p$, $c = q$

"abc-Formel"

$$x = \frac{1}{2} \left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q} \right) = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q}$$

$$= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

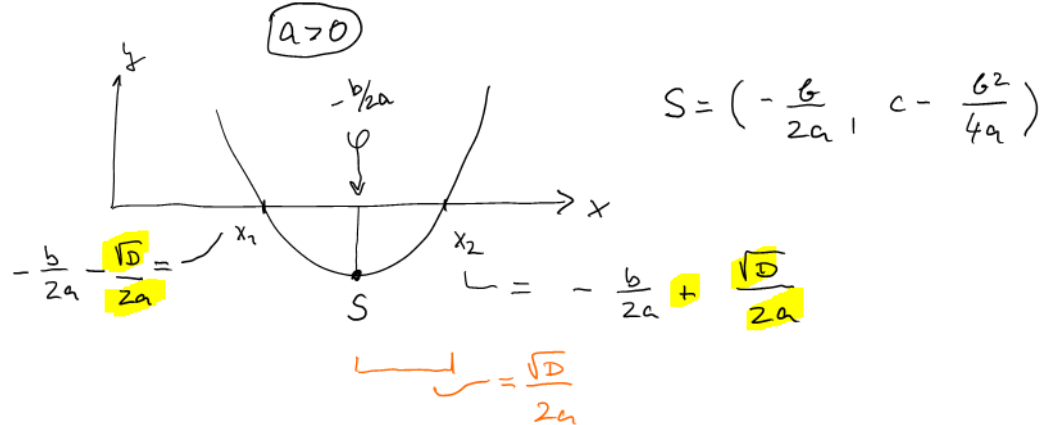
- für $p^2 = 4q$ genau eine reelle Lösung, nämlich $x = -\frac{p}{2}$,
- für $p^2 < 4q$ keine reelle Lösung.

Bemerkung 3.1.7. im Fall einer positiven Diskriminante D , also $D = b^2 - 4ac > 0$ liegen die Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

der Parabel symmetrisch zur Scheitelstelle $x = -\frac{b}{2a}$; im Fall $D = 0$ ist der Scheitelpunkt die einzige Nullstelle, d.h. die Parabel berührt die x -Achse.

Einschub 3.1.8. ...

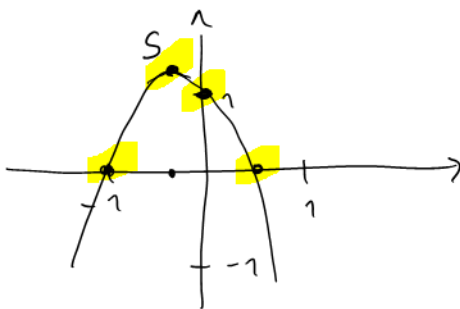


Beispiel $f(x) = -2x^2 - x + 1$, $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$

$$x = \frac{1}{2a} (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) = \frac{1}{-4} (1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)1}) = -\frac{1}{4} (1 \pm 3)$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{4}{4} = -1, x_2 = \frac{1}{2}, D = b^2 - 4ac = 9 > 0$$

$$S = \left(-\frac{-1}{-4}, 1 - \frac{1}{8} \right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{8} \right)$$



$$f(0) = 1$$

3.2 Linearfaktorzerlegung

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Zu gegebenen Stellen x_1, x_2 ist mit

$$f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = a'x^2 + b'x + c'$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2$$

für $a \neq 0$ eine quadratische Funktion gegeben, die genau die Nullstellen x_1 und x_2 besitzt und andersherum hat jede quadratische Funktion mit den Nullstellen x_1 und x_2 diese Gestalt.

Einschub 3.2.1. ... $ax^2 + bx + c = f(x)$. Nach abc-Formel sind die NST

$$x_1 = \frac{1}{2a} (-b + \sqrt{D}), \quad x_2 = \frac{1}{2a} (-b - \sqrt{D}) \quad \textcircled{1} \quad -a(x_1 + x_2) = -$$

$$= -a \left(\frac{1}{2a} (-b + \sqrt{D}) + \frac{1}{2a} (-b - \sqrt{D}) \right) = -\frac{1}{2} (-b + \sqrt{D}) - \frac{1}{2} (-b - \sqrt{D})$$

$$= \frac{1}{2} (b - \sqrt{D} + b + \sqrt{D}) = b$$

$$\textcircled{2} \quad a x_1 x_2 = a \cdot \frac{1}{2a} (-b + \sqrt{D}) \cdot \frac{1}{2a} (-b - \sqrt{D}) = \frac{1}{4a} (-b + \sqrt{D}) (-b - \sqrt{D})$$

$$\stackrel{\text{Bin}}{\approx} = \frac{1}{4a} ((-b)^2 - (\sqrt{D})^2) = \frac{1}{4a} (b^2 - D) = \frac{1}{4a} (b^2 - (b^2 - 4ac))$$

$$= \frac{1}{4a} \cdot 4ac = c$$

Für $a=1$, $p=b$ und $q=c$ erhält man den

Satz 3.2.2 (von Vieta). Besitzt eine normierte quadratische Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ die Nullstellen x_1 und x_2 , so gilt: $-p = x_1 + x_2$ und $q = x_1 \cdot x_2$.

Definition 3.2.3. Die Darstellung der Funktion f in der Form $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ heißt Linearfaktorzerlegung. Die Faktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ heißen Linearfaktoren.

Satz 3.2.4. Eine quadratische Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ mit den Nullstellen x_1 und x_2 besitzt die eindeutige Linearfaktorzerlegung

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Einschub 3.2.5. ... Bew Bestimme die NST x_1, x_2 von f dann gilt

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \square$$

Bemerkung 3.2.6. Im Spezialfall $x_1 = x_2$ gilt

$$f(x) = a(x - x_1)^2 = ax^2 + \underline{2ax_1} \cdot x + \underline{ax_1^2},$$

d.h. für die Diskriminante gilt:

$$D = (\underline{2ax_1})^2 - 4a \cdot \underline{ax_1^2} = 0.$$

$$\underline{b} = 2ax_1, \quad \underline{c} = ax_1^2$$

$$D = \underline{b^2} - 4ac$$

Folglich hat f genau eine Nullstelle. Im Sinne der Linearfaktorzerlegung handelt es sich eigentlich um zwei Nullstellen, die auf dieselbe Stelle fallen. In diesem Fall spricht man von einer doppelten Nullstelle x_1 .

Beispiel 3.2.7. $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$

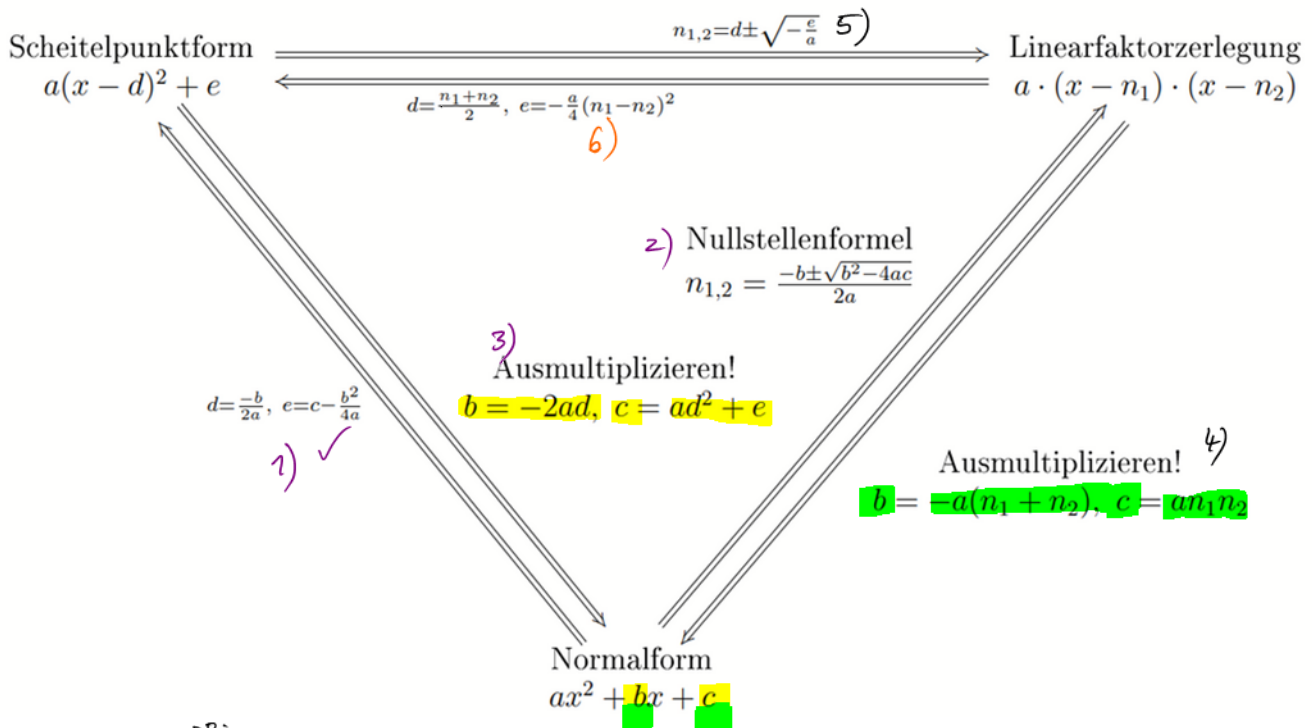
Scheitelpunktform $f(x) = 2(x^2 - 2x - 15) = 2(x^2 - 2x + 1 - 1 - 15) = 2((x-1)^2 - 1 - 15) = 2(x-1)^2 - 32$

Linearfaktorzerlegung (LFZ) Nullstellen bestimmen, $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 15} \Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{16} = 1 + 4 = 5$
 $x_2 = 1 - \sqrt{16} = 1 - 4 = -3$

$\Rightarrow f(x) = 2(x-5)(x+3) \stackrel{\text{Probe}}{=} \dots = 2x^2 - 4x - 30$



3) $a(x-d)^2 + e = a(x^2 - 2dx + d^2) + e = ax^2 - 2adx + ad^2 + e$

4) $a(x-n_1)(x-n_2) = a(x^2 - xn_2 - xn_1 + n_1n_2) = ax^2 + ax(-n_2 - n_1) + an_1n_2$

5) abc-Formel und 3) ergibt:

$$n_1 = \frac{1}{2a} \left(2ad - \sqrt{4a^2d^2 - 4a(ad^2 + e)} \right)$$

$$= \frac{1}{2a} \left(2ad - \sqrt{-4ae} \right) = d - \frac{1}{2a} \sqrt{-4ae} = d - \sqrt{-\frac{ae}{a^2}}$$

$$= d - \sqrt{-\frac{e}{a}}, \quad \text{analog} \quad n_2 = d + \sqrt{-\frac{e}{a}}$$

6) das ist i) und 4): Übung!