

3.3 Minimum oder Maximum einer quadratischen Funktion

Definition 3.3.1. Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Stelle $x_0 \in A$ heißt (globale) Maximalstelle, falls

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in A \text{ gilt.}$$

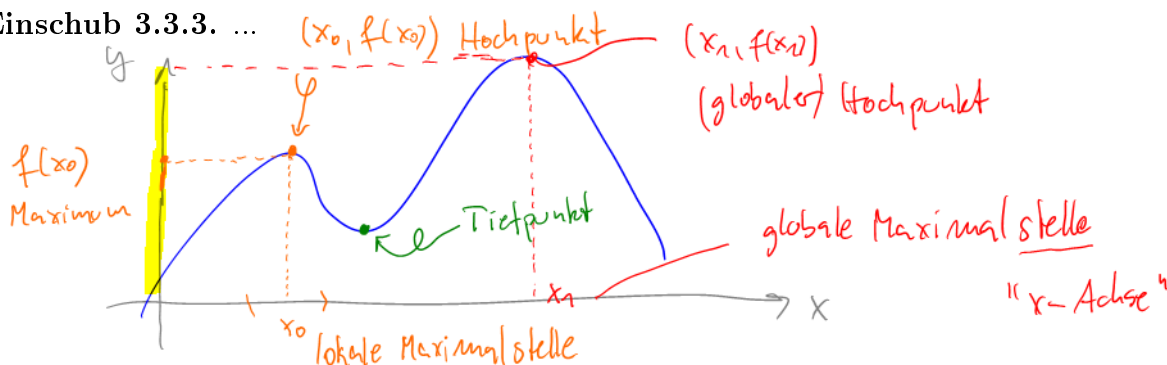
In diesem Fall heißt $f(x_0)$ (globales) Maximum und der Punkt $(x_0, f(x_0))$ (globaler) Hochpunkt. Der Punkt $x_0 \in A$ heißt (globale) Minimalstelle, falls

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in A$$

gilt. Dann nennt man $f(x_0)$ das (globale) Minimum und $(x_0, f(x_0))$ den (globalen) Tiefpunkt.

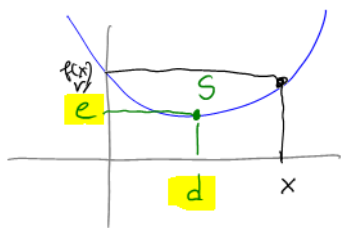
Bemerkung 3.3.2. Gilt die jeweilige Ungleichung nur auf einer Umgebung von x_0 und nicht den ganzen Definitionsbereich A , spricht man von lokalen Maximal- und Minimalstellen, Maxima und Minima, Hoch- und Tiefpunkten.

Einschub 3.3.3. ...

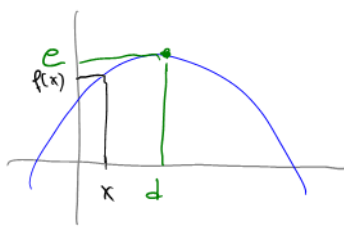


Bei quadratischen Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-d)^2 + e$ gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:

Einschub 3.3.4. ... $a > 0$



$a < 0$



Ist $a > 0$ so ist die Parabel nach oben geöffnet und die Parabel hat einen Tiefpunkt im Scheitelpunkt (d, e) , denn

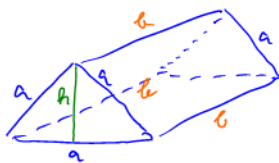
$$\exists \exists f(x) \geq f(d) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \underbrace{a}_{>0} \underbrace{(x-d)^2}_{\geq 0} + e \geq e = f(d) \text{ für alle } x$$

Ist $a < 0$, so ist die Parabel nach unten geöffnet und die Parabel hat einen Hochpunkt im Scheitelpunkt (d, e) , denn

$$f(x) = \underbrace{a}_{<0} \underbrace{(x-d)^2}_{\geq 0} + e \leq e = f(d) \text{ für alle } x$$

Somit kann man bei quadratischen Funktionen ein Extremum (d.h. Maximum oder Minimum) bestimmen, indem man den Scheitelpunkt bzw. die Scheitelpunktsform z.B. mit quadratischer Ergänzung bestimmt.

Einschub 3.3.5. ... Betrachte ein Drahtkantermmodell eines Prismas mit gleichseitigem Dreieck als Grundfläche (Seitenlänge a)



Gesamtlänge des Drahtes : 144 cm

1) Bestimme die Oberfläche des Prismas in Abhängigkeit von a

2) Bestimme für welches a die Oberfläche maximal wird

zu 1) Oberfläche $O(a,b) = 2 \times \text{Dreiecksfläche} + 3 \times \text{Rechteckfläche}$

$$= 2 \cdot a \cdot h \cdot \frac{1}{2} + 3ab = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 + 3ab,$$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$ Kantenlänge liefert Nebenbedingung : $144 = 6a + 3b$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{3} (144 - 6a) = 48 - 2a, \text{ also :}$$

$$f(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 + 3a(48 - 2a) = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 + 144a - 6a^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \right) a^2 + 144a \text{ ist quadratische Funktion}$$

$$< 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 12$$

also Parabel nach unten geöffnet, daher Maximum am Scheitelpunkt

zu 2 Scheitelpunkt von f bestimmen, zB mit der Formel aus vorherigen Kapitel

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right) \text{ für } f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{hier } a_0 = -\frac{144}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \right)} = -\frac{144}{\sqrt{3} - 12} = \frac{144}{12 - \sqrt{3}} \text{ ist die Stelle}$$

des lokalen Maximums von f

$$\text{zu 2 alternativ mit LFZ : } f(a) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \right) a^2 + 144a = a \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \right) a + 144 \right)$$

$$\text{Finde Nullstellen von } f : 0 = f(a) \Rightarrow a=0 \text{ oder } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \right) a + 144 = 0$$

$$\Rightarrow a=0 \text{ oder } a = -\frac{144}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 6}$$

Wir wissen: die "x-Koordinate" des Scheitelpunktes

$$\text{Mitte zwischen den Nullstellen, also : } \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{144}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 6} \right)$$

liegt in der

$$= -\frac{144}{\sqrt{3} - 12} = \frac{144}{12 - \sqrt{3}}$$

diese Methode funktioniert hier gut, weil der quadratischen Funktion Null ist.

konstanter Term

3.4 Monotonie

Anders als bei linearen Funktionen sind quadratische Funktionen nicht auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend oder fallend. Es gilt aber der folgende

Einschub 3.4.1. ...



Satz 3.4.2. Eine quadratische Funktion f habe die Scheitelpunktsform

$$f(x) = a(x - d)^2 + e.$$

- Für $a > 0$ gilt: Auf dem Intervall $(-\infty, d]$ (also links vom Scheitelpunkt) ist der Graph von f streng monoton fallend und auf dem Intervall $[d, +\infty)$ (also rechts vom Scheitelpunkt) ist der Graph von f streng monoton wachsend.
- Für $a < 0$ gilt: Auf dem Intervall $(-\infty, d]$ ist der Graph von f streng monoton wachsend und auf dem Intervall $[d, +\infty)$ ist der Graph von f streng monoton fallend.

Beweis zu zeigen $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ für streng monoton wachsend
Sei $x_1 < x_2$ gegeben, dann gilt für die Differenz

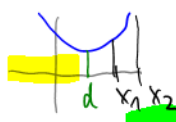
$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= a(x_2 - d)^2 + e - (a(x_1 - d)^2 + e) = a((x_2 - d)^2 - (x_1 - d)^2) \\ &\stackrel{\text{3-Binomi}}{=} a \cdot ((x_2 - d) + (x_1 - d)) \cdot ((x_2 - d) - (x_1 - d)) \\ &= a \cdot ((x_2 - d) + (x_1 - d)) \cdot (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

$s^2 - t^2 \stackrel{\text{3-Binomi}}{=} (s+t)(s-t)$
 $= x_2 - x_1$

Nun betrachten wir die Fälle $a > 0$ und $a < 0$:

Einschub 3.4.3. ... $a > 0$ 1) $x_1 < x_2 \leq d \Rightarrow x_1 - d < 0, x_2 - d \leq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a(x_1 - d + x_2 - d) &< 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \\ \Rightarrow f \text{ monoton fallend} \end{aligned}$$

2) $d \leq x_1 < x_2$  $\Rightarrow x_1 - d \geq 0, x_2 - d > 0$

$$\Rightarrow x_1 - d + x_2 - d > 0 \Rightarrow a(x_1 - d + x_2 - d) > 0 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f \text{ mon. wachsend}$$

$a < 0$ Übung!

3.5 Quadratisches Wachstum

Bei linearem Wachstum erhält man bei gegebenem Zuwachs Δx der x -Werte stets denselben Zuwachs Δy der zugeordneten y -Werte, d.h. die Zunahme (Steigungsfaktor) ist konstant. Wächst hingegen die Zunahme linear, so erhält man quadratisches Wachstum:

Einschub 3.5.1. ...

Beispiel 3.5.2.

- (i) Betrachte die Funktion $f(x) = ax$ und die Dreiecksfläche $A(x)$, den Graphen von f , die x -Achse und die Parallele zur y -Achse durch den Punkt $(x, 0)$.

Einschub 3.5.3. ...

Dann gilt für den Zuwachs in x bei gegebener Zunahme Δx :

Einschub 3.5.4. ...

d.h. die relative Zunahme in x beträgt

Einschub 3.5.5. ...

d.h. der relative Zuwachs ist linear. Elementargeometrisch sieht man sofort, dass die Größe $A(x)$ quadratisch wächst: $A(x) = \frac{1}{2}ax^2$.

- (ii) Als diskretes Analogon betrachte die Folge der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, Diese Folge wächst linear (Konstante Zuwächse, nämlich gleich 2).

Sei s_n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen. Es gilt $s_n = n^2$. Die Folge s_n wächst daher quadratisch.

Einschub 3.5.6. ... $s_1 = 1, s_2 = 4, s_3 = 9, s_n = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1$

$\Rightarrow s_n - s_{n-1} = 2n-1$ also Zuwächse wachsen linear mit n

aber $s_n =$ 

$= n^2$ die Summe selbst wächst quadratisch