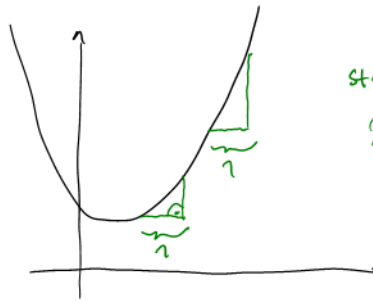
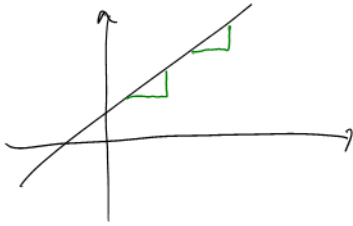


3.5 Quadratisches Wachstum

Bei linearem Wachstum erhält man bei gegebenem Zuwachs Δx der x -Werte stets denselben Zuwachs Δy der zugeordneten y -Werte, d.h. die Zunahme (Steigungsfaktor) ist **konstant**. Wächst hingegen die Zunahme **linear**, so erhält man quadratisches Wachstum:

Einschub 3.5.1. ...

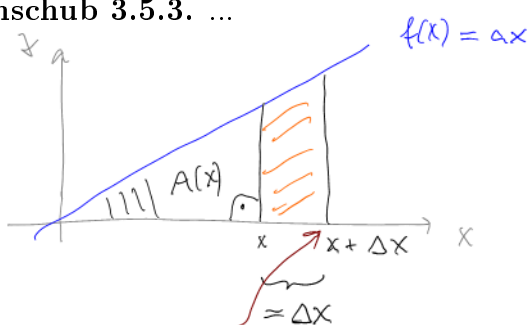


steigungsfaktoren bei
Parabel nicht mehr
ähnlich

Beispiel 3.5.2.

- (i) Betrachte die Funktion $f(x) = ax$ und die Dreiecksfläche $A(x)$, den Graphen von f , die x -Achse und die Parallele zur y -Achse durch den Punkt $(x, 0)$.

Einschub 3.5.3. ...



$$A(x) = \text{Dreiecksfläche} \\ = x \cdot f(x) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} a x^2$$

Dann gilt für den Zuwachs in x bei gegebener Zunahme Δx :

Einschub 3.5.4. ...

$$A(x + \Delta x) = (x + \Delta x) \cdot f(x + \Delta x) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x + \Delta x)^2 \cdot a$$

$$\begin{aligned} A(x + \Delta x) - A(x) &= \frac{1}{2} a (x + \Delta x)^2 - \frac{1}{2} a x^2 = \frac{1}{2} a (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - \frac{1}{2} a x^2 \\ &= \frac{1}{2} a (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2) = \frac{1}{2} a (2x\Delta x + (\Delta x)^2) \end{aligned}$$

d.h. die relative Zunahme in x beträgt

Einschub 3.5.5. ...

$$\frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} a (2x + \Delta x) = ax + \frac{1}{2} a \Delta x$$

für Δx "sehr klein" wächst rel. Zunahme linear in x

d.h. der relative Zuwachs ist linear. Elementargeometrisch sieht man sofort, dass die Größe $A(x)$ quadratisch wächst: $A(x) = \frac{1}{2} ax^2$.

- (ii) Als diskretes Analogon betrachte die Folge der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, Diese Folge wächst linear (Konstante Zuwächse, nämlich gleich 2).

Sei s_n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen. Es gilt $s_n = n^2$. Die Folge s_n wächst daher quadratisch.

Einschub 3.5.6. ...

siehe 14.11.2025

(iii) Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Anders als bei gleichförmigen Bewegungen, bei denen die Geschwindigkeit v (d.h. die Ortsveränderung pro Zeit) konstant ist, wächst v hier linear mit der Zeit t , d.h.

$$a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v(t) = a \cdot t + v_0,$$

$$t=0: v(0) = v_0$$

$$\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s} + \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{Einheiten}$$

wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und a die Beschleunigung bezeichnet. Für den zurückgelegten Weg $s(t)$ nach der Zeit t gilt dann

$$s(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0,$$

Weg-Zeit-Gesetz

$$s(0) = s_0$$

wobei s_0 die Anfangsposition zur Zeitpunkt $t=0$ bezeichnet.

Beispiel 3.5.7. Es folgen Beispiele zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung.

- **Bremsen:** Ein Fahrzeug bewegt sich mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 und wird abgebremst, d.h. es tritt eine negative Beschleunigung $-a$ auf. Entsprechend liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Weg-Zeit-Gesetz

$$s(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t + 0 \quad s_0 = 0$$

vor. Der Zeitpunkt t_0 des Anhaltens ist gegeben durch

$$v(t_0) = -at_0 + v_0 = 0,$$

umstellen nach t_0 ergibt

d.h. $t_0 = \frac{v_0}{a}$ Der Bremsweg ist gegeben durch

$$= -\frac{1}{2}a \frac{v_0^2}{a^2} = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} = -v_0^2/a$$

$$s(t_0) = -\frac{1}{2}at_0^2 + v_0t_0 = -\frac{1}{2}a \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + v_0 \frac{v_0}{a} = \frac{1}{2a}v_0^2,$$

d.h. der Bremsweg wächst quadratisch mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 .

Einschub 3.5.8. ... Bremsweg beim Radfahren: bremsen mit $5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$14,5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow s = \frac{4^2}{2 \cdot 5} = \frac{16}{10} = 1,6 \text{ (Meter)}$$

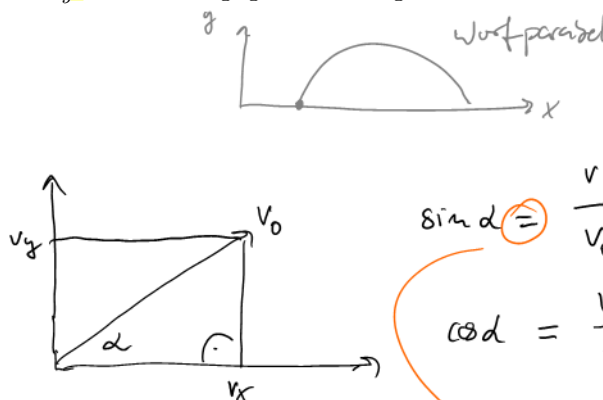
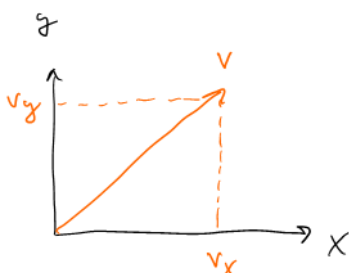
$$25 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow s = \frac{7^2}{2 \cdot 5} = \frac{49}{10} = 4,9 \text{ (Meter)}$$

- **freier Fall:** Im Schwerfeld der Erde bewegt sich jeder Körper gleichmäßig beschleunigt nach unten. Die Beschleunigung beträgt ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands $a = -g$, mit $g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Entsprechend lautet das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2.$$

- **Wurfparabel:** Wirft man einen Körper schräg nach oben, so wird die Flugbahn durch eine **Wurfparabel** beschrieben. Diese Parabel hängt ab von der Anfangsgeschwindigkeit: Sei v_x die Anfangsgeschwindigkeit in horizontaler Richtung und v_y die Anfangsgeschwindigkeit in vertikaler Richtung.

Einschub 3.5.9. ...



$$\sin \alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{\text{Gegkath.}}{\text{Hypo}} = \frac{v_y}{v_0}$$
$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v_0} = \frac{\text{Ankath.}}{\text{Hypo}} = \frac{v_x}{v_0}$$

Alternativ kann man die Anfangssituation auch beschreiben mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 des Körpers und dem Abwurfwinkel α gegenüber der Horizontalen. In diesem Fall ist dann

Pythagoras $v_x = v_0 \cdot \cos \alpha$ und $v_y = v_0 \cdot \sin \alpha$.

oder umgekehrt:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{und} \quad \alpha = \arcsin \left(\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \right).$$

Die Bewegung in horizontaler Richtung ist eine gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_x , d.h. für die x -Koordinate des Körpers gilt:

$$x(t) = v_x \cdot t.$$

Die Bewegung in vertikaler Richtung ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit v_y und Beschleunigung $-g$, d.h. für die y -Koordinate des Körpers gilt:

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_y \cdot t.$$

Bestimmung der Bahnkurve: Aus

folgt

$$x(t) = v_x \cdot t$$

$$t = \frac{x(t)}{v_x}$$

Einsetzen in die Gleichung für $y(t)$ liefert:

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x(t)}{v_x} \right)^2 + v_y \cdot \frac{x(t)}{v_x},$$

d.h. aufgefasst als Funktion von x ist y eine quadratische Funktion, die Bahnkurve ist also parabelförmig. Um die Wurfweite¹ zu bestimmen, setzen wir $y = 0$ und bestimmen die zugehörige Wurfweite x :

$$\begin{aligned} y = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x}{v_x} \right)^2 + v_y \cdot \frac{x}{v_x} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \frac{g}{v_x^2} \cdot \cancel{x} \cdot \left(\cancel{x} - \frac{2v_x \cdot v_y}{g} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \frac{g}{v_x^2} \cdot \cancel{x} \cdot \left(x - \frac{2v_x \cdot v_y}{g} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = \frac{2v_x \cdot v_y}{g}, \end{aligned}$$

d.h. die Wurfweite beträgt $\frac{2v_x \cdot v_y}{g}$.

3.6 Polynomfunktionen

Definition 3.6.1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Polynom(funktion)*, falls es *Koeffizienten* $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Ist $a_n \neq 0$, so sagen wir, dass das Polynom den *Grad n* hat (kurz: $\text{grad}(f) = n$). Für das Nullpolynom $f = 0$ setzen wir $\text{grad}(f) = -\infty$.

Einschub 3.6.2. ... $f(x) = 1 \cdot x^3 + 2x^2 + x + 1$ $\text{grad } f = 3$

linear $f(x) = 2x^1 + 5$ $\text{grad } f = 1$ konstant $f(x) = a_0$ $\text{grad } f = 0$

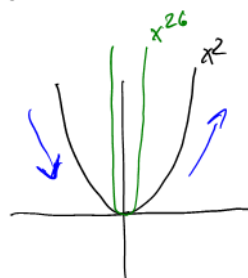
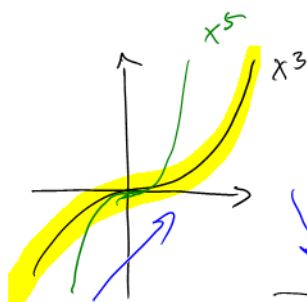
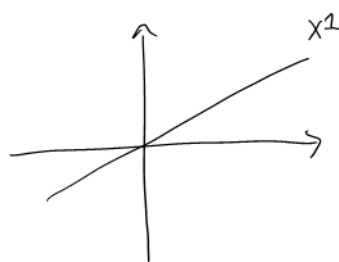
quadratisch $f(x) = -x^2 + 5$ $\text{grad } f = 2$

¹Hier gehen wir vereinfachend davon aus, dass der Körper am Boden abgeworfen wird und auch wieder am Boden landet, anderenfalls muss man die Abwurfhöhe mit berücksichtigen.

Beispiele 3.6.3. a. Polynome vom Grad 0 bzw. Grad 1 bzw. Grad 2 sind die konstanten bzw. linearen bzw. quadratischen Funktionen.

b. Polynome der Form $f(x) = x^n$ heißen **Potenzfunktionen** oder **Monome**. Monome f mit ungeradem Grad sind punktsymmetrisch zum Ursprung, d.h. es gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie sind streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Einschub 3.6.4. ...



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3, & f(-x) &= (-x)^3 = \overbrace{(-1)^3}^{= (-1) \cdot x} \cdot x^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = (-1)x^3 = -x^3 = -f(x) \\ f(x) &= x^4, & f(-x) &= (-x)^4 = \overbrace{(-1)^4}^{= (-1)^2 \cdot (-1)^2} \cdot x^4 = (-1)^4 \cdot x^4 = 1 \cdot x^4 = x^4 = f(x) \end{aligned}$$

Monome von geradem Grad sind achsensymmetrisch zur vertikalen Achse, d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie sind streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ und streng monoton wachsend auf $[0, +\infty)$.

Polynome haben ähnliche Eigenschaften wie die ganzen Zahlen:

Satz 3.6.5. Die Menge der Polynome bilden (wie $\mathbb{Z}$) einen euklidischen Ring, d.h. man kann Polynome mit den üblichen Rechenregeln addieren, subtrahieren und multiplizieren. Das Verfahren der Polynomdivision liefert eine Division mit Rest wie folgt:

Zu Polynomen f und g , $g \neq 0$ (Nullpolynom), gibt es eindeutig bestimmte Polynome q und r mit

$$\text{grad}(r) < \text{grad}(g) \quad \text{und} \quad f = q \cdot g + r,$$

man spricht f durch g ergibt q mit Rest r .

Der Grad des Summenpolynoms ist kleiner gleich dem Maximum der Grade der Summanden. Der Grad des Produktpolynoms ist gleich der Summe der Grade der Faktoren.

Bemerkung 3.6.6. Man addiert und subtrahiert Polynome, indem man die Koeffizienten addiert bzw. subtrahiert. Dabei setzt man „fehlende“ Koeffizienten gleich 0. Das Produkt der Polynome

$$\sum_{i=0}^m a_i x^i \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

bestimmt man, indem man das Produkt

$$(a_m x^m + \dots + a_0)(b_n x^n + \dots + b_0)$$

in eine Summe $a_m b_n x^{m+n} + \dots + a_0 b_0$ überführt.

Einschub 3.6.7. ... Addition $(3x^3 + 2x^2 - 5) + (x^4 - x^3 + x + 1)$
 $= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 4$

Subtraktion analog, jedes Polynom hat ein „Negatives“, also z.B.
 $(x^3 + x) - (x^3 + x) = 0$ also $-x^3 - x$ Negatives von $x^3 + x$ $x^2 \cdot x^4 = x^{2+4}$

Allgemein KG, AG, DG gelten für Polynome weil sie in $\mathbb{R}$ gelten

Multiplikation $(x^2 - x) \cdot (x^4 + x^3) = x^2 \cdot (x^4 + x^3) - x \cdot (x^4 + x^3) = x^6 + x^5 - x^5 - x^4 = x^6 - x^4$

Beispiele 3.6.8. Polynomdivision mit Rest

nicht möglich $x^5 - x^{-5} = x^{5+(-5)} = x^0 = 1$

Bsp teile $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2$

durch $g(x) = x^2 + x$

$$(x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2) : (x^2 + x) = x^2 + 2x - 1 + \frac{4x+2}{x^2+x}$$

$\Leftrightarrow (*)$

analog in $\mathbb{Z}$:
 $8 = 2 \cdot 3 + 2$
 $\text{"} 8 \text{ durch } 3 = 2 \text{ Rest } 2 \text{"}$

Rest: $4x + 2$

denk $1 < 2$ $\rightarrow$ Abbruch liefert

$(*)$
 $\Leftrightarrow \frac{x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2}{x^2 + x} = x^2 + 2x - 1 + \frac{4x+2}{x^2+x} \quad | \cdot (x^2+x)$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2}_{f(x)} = \underbrace{(x^2 + 2x - 1)}_{g(x)} \cdot \underbrace{(x^2 + x)}_{g(x)} + \underbrace{4x + 2}_{r(x)}$

Einschub 3.6.9. ...