Beispiele 3.6.8. Polynomdivision mit Rest

Einschub 3.6.9. ... "Beweis" des Satzes. Existenz von q und r durch das Verfahren der Polynomdivision. Eindeutigkeit von q und r

Seien $q \cdot g + r = f = q' \cdot g + r'$. zwei Darstellungen von f

Zu zeigen ist $q = q'$ und $r = r'$. Für die Polynome r, r' gilt

$\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g)$ und $\mathrm{grad}(r') < \mathrm{grad}(g)$. Dann: $q \cdot g + r = q' g + r'$

$\Rightarrow q \cdot g - q' \cdot g = r' - r \Rightarrow \underbrace{(q - q') \cdot g}_{\text{Vielfaches von } g} = \underbrace{r' - r}_{\mathrm{grad}(r'-r) < \mathrm{grad}(g)}$

$\rightsquigarrow$ Grad "links" $\geq \mathrm{grad}(g)$ und grad "rechts" $< \mathrm{grad}(g)$

$\Rightarrow q - q' = 0$

$\Rightarrow q = q' \Rightarrow r = r'$ $\square$

3.7 Nullstellen von Polynomen

Wie für quadratische Funktionen liefert der Ansatz

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n), \quad a \neq 0 \qquad f(x_2) = 0$$

ein Polynom

$$f(x) = ax^n + ...$$

vom Grad n mit genau den Nullstellen $x_1, ..., x_n$. Diese Darstellung heißt entsprechend auch *Linearfaktorzerlegung*. Ist eine Nullstelle x_1 bekannt, so kann man den zugehörigen Linearfaktor $x - x_1$ abspalten:

Einschub 3.7.1. ... $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$

also f hat Nullstelle $x_1 = 1$. Also ist f durch $x - x_1 = x - 1$ ohne Rest teilbar:

$x^3 : x = x^2$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
-(x^3 - x^2) \\
\hline
\quad -x^2 - 5x + 6 \\
\quad -(-x^2 + x) \\
\hline
\qquad -6x + 6 \\
\qquad -(-6x + 6) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Rest

also:

$$\underbrace{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}_{= f(x)} = \underbrace{(x^2 - x - 6)}_{= g(x)}(x - 1)$$

Nullstellen von $g(x)$: $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \underbrace{6}_{= \frac{24}{4}}}$ (p/q F) $= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$\Rightarrow x = 3$ oder $x = -2$ Insgesamt $f(x) = (x-3)(x+2)(x-1)$

Satz 3.7.2. *Sei f ein Polynom vom Grad n, dann gilt:*
Der Punkt $x_1 \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Nullstelle von f, wenn es ein Polynom g vom Grad $n - 1$ mit

$$f(x) = (x - x_1) g(x)$$

gibt. Das bedeutet, dass $x - x_1$ das Polynom f ohne Rest teilt.

Beweis Aufgrund der Division mit Rest existieren Polynome q und r mit

ausgelassen

$$f(x) = q(x)(x - x_1) + r(x), \text{ mit } \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(x - x_1) = 1,$$

d.h. $r(x) = r_0$ ist eine Konstante. Nun ist x_1 genau dann eine Nullstelle von f, wenn

$$0 = f(x_1) = q(x_1)(x_1 - x_1) + r(x_1) = r_0,$$

also genau dann, wenn $f(x)$ ohne Rest durch $(x - x_1)$ teilbar ist. □

Folgerung 3.7.3. *Sei f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, dann gilt:*
Sind $x_1, ..., x_k$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von f, so gibt es natürliche Zahlen $n_1, ..., n_k$ und ein Polynom g vom Grad $n - n_1 - n_2 - ... - n_k$ ohne reelle Nullstellen, so dass gilt:

$$f(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} ... (x - x_k)^{n_k} g(x).$$

Insbesondere hat ein Polynom vom Grad n höchstens n reelle Nullstellen.

Einschub 3.7.4. ... Bsp $f(x) = 2(x-1)^3 (x+2)^4 (x-3)^1 \overbrace{(x^2+1)}^{g(x)}$

$n_1 = 3$, $x_1 = 1$; $n_2 = 4$, $x_2 = -2$; $n_3 = 1$, $x_3 = 3$

$\operatorname{grad}(g) = 2$, $\underbrace{\operatorname{grad}(f) = 10}_{= n}$, $10 - 3 - 4 - 1 = \underbrace{2}_{= \operatorname{grad}(g)}$

hat keine reelle Nullstelle, aber zwei NST in $\mathbb{C}$: $i, -i$.
(in $\mathbb{C}$: $i^2 = -1$)

Bemerkung 3.7.5. In den komplexen Zahlen gilt sogar der *Fundamentalsatz der Algebra*:

„Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt eine komplexe Nullstelle.“

Durch sukzessiven Abspalten der Nullstellen folgt, dass für jedes Polynom f vom Grad $n \geq 1$ komplexe Zahlen $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$ als Nullstellen von f mit

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

existieren.

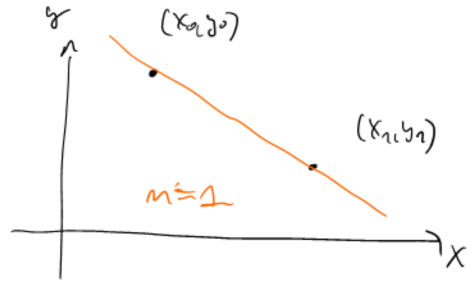
Im Reellen kann man mithilfe dieser Überlegungen (in den komplexen Zahlen) zeigen, dass sich jedes Polynom in Linearfaktoren und quadratische Faktoren zerlegen lässt: Für jedes Polynom f vom Grad $n \geq 1$ mit reellen Koeffizienten und reellen Nullstellen $x_1, ..., x_k$ gibt es quadratische Funktionen $q_1, ..., q_m$ ohne reelle Nullstellen, so dass

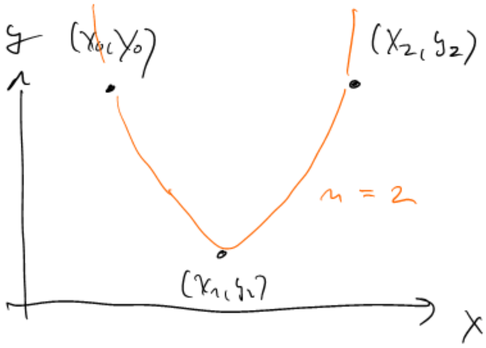
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)\overbrace{q_1(x)...q_m(x)}^{g(x)} \qquad \textit{(Reelle Produktdarstellung)}$$

gilt.

3.8 Anwendung: Interpolation

Einschub 3.8.1. ...





Existenz

Satz 3.8.2. *Seien $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ Punkte mit paarweise verschiedenen x_i's. Dann gibt es genau ein Polynom f vom Grad höchstens n mit $f(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, 1, ..., n$. Diese Polynomfunktion f heißt* Interpolationspolynom.

Eindeutig

Faktor $(x - x_i)$ fehlt

Zum Beweis der Existenz solcher Polynome betrachtet man die sogenannten *Lagrange-Interpolationspolynome*

$$p_i(x) := \frac{(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot ... \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x_i - x_n)}; \qquad i = 0, 1, ..., n,$$

Faktor $(x_i - x_i)$ fehlt

für die gilt

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i = j \end{cases}.$$

$$p_1(x_2) = \frac{(\cdots)\cdots\overbrace{(x_2 - x_2)}^{=0}\cdots(\text{—})}{\cdots\cdots} = 0$$

$$p_i(x_i) = \frac{(x_i - x_0) \cdots\cdots (x_i - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots\cdots (x_i - x_n)} = 1$$

Dann ist

$$f(x) := \sum_{j=0}^{n} y_j p_j(x)$$

das gesuchte Polynom.

Einschub 3.8.3. ...

Die Eindeutigkeit einer solchen Darstellung zeigt man so: Sind f und g Interpolationspolynome, dann hat ist $f-g$ ein Polynom vom Grad höchstens n mit $n+1$ Nullstellen $x_0, ... x_n$. Daher muss $f-g$ das Nullpolynom sein, also $f=g$.

Zur Berechnung des Interpolationspolynoms kann man daher die Lagrange-Interpolationspolynome bestimmen und dann f wie oben angegeben berechnen.

Alternativ kann man mit $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ ansetzen und aus den Gleichungen

$$f(x_0) = y_0, ..., f(x_n) = y_n$$

ein lineares Gleichungssystem mit $n+1$ Gleichungen und den $n+1$ Unbekannten $a_n, ..., a_0$ erhalten. Dieses lineare Gleichungssystem hat nach dem vorstehenden Satz genau eine Lösung, nämlich die Koeffizienten des Interpolationspolynoms.

Es folgt ein Beispiel zur Langrange-Interpolation:

Einschub 3.8.4. ... Beispiel zur Interpolation. Betrachte $P_0(-1,6)$, $P_1(1,2)$, $P_2(2,3)$ (3 Punkte ⇝ Polynom vom Grad 2), also Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Erhalte Gleichungen wie folgt: Punkte liegen auf Graph f, also gilt: $f(-1) = 6$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ ⇒

$$\begin{aligned} 6 &= f(-1) = a - b + c \\ 2 &= f(1) = a + b + c \\ 3 &= f(2) = 4a + 2b + c \end{aligned}$$

erhalte ein LGS in 3 Variablen a, b, c mit 3 Gleichungen.

Lösung mit Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array} \longmapsto \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & -3 & -21 \end{array}$$

$$\longmapsto \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -3c = -9 \Rightarrow c = 3 \\ 2b = -4 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 6 + b - c = 6 - 2 - 3 = 1$$

Also $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ⟵ Interpolationspolynom