Bemerkung 3.7.5. In den komplexen Zahlen gilt sogar der *Fundamentalsatz der Algebra*:

„Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt eine komplexe Nullstelle.“

Durch sukzessiven Abspalten der Nullstellen folgt, dass für jedes Polynom f vom Grad $n \geq 1$ komplexe Zahlen $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$ als Nullstellen von f mit

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

existieren.

Im Reellen kann man mithilfe dieser Überlegungen (in den komplexen Zahlen) zeigen, dass sich jedes Polynom in Linearfaktoren und quadratische Faktoren zerlegen lässt: Für jedes Polynom f vom Grad $n \geq 1$ mit reellen Koeffizienten und reellen Nullstellen $x_1, ..., x_k$ gibt es quadratische Funktionen $q_1, ..., q_m$ ohne reelle Nullstellen, so dass

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)q_1(x)...q_m(x) \qquad \textit{(Reelle Produktdarstellung)}$$

gilt.

3.8 Anwendung: Interpolation

Einschub 3.8.1. ...

(n+1 Punkte)

Satz 3.8.2. *Seien $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ Punkte mit paarweise verschiedenen x_i's. Dann gibt es genau ein Polynom f vom Grad höchstens n mit $f(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, 1, ..., n$. Diese Polynomfunktion f heißt* Interpolationspolynom.

Zum Beweis der Existenz solcher Polynome betrachtet man die sogenannten *Lagrange-Interpolationspolynome*

$$p_i(x) := \frac{(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot ... \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x_i - x_n)}; \qquad i = 0, 1, ..., n,$$

für die gilt

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i = j \end{cases}.$$

$j \neq i$: $p_i(x_j) = 0$ denn im Zähler taucht $x_j - x_j = 0$ auf

$j = i$: $p_i(x_i) = 1$ denn „alle Faktoren kürzen sich paarweise“

Dann ist

$$f(x) := \sum_{j=0}^{n} y_j p_j(x)$$

$$= y_0 p_0(x) + \dots + y_n p_n(x)$$

das gesuchte Polynom.

Einschub 3.8.3. ..„Beweis“ Satz 3.8.2.

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j p_j(x_i) \overset{\text{denn } =0 \text{ für } i \neq j}{=} y_i \overbrace{p_i(x_i)}^{=1} = y_i$$

Die Eindeutigkeit einer solchen Darstellung zeigt man so: Sind f und g Interpolationspolynome, dann hat ist $f-g$ ein Polynom vom Grad höchstens n mit $n+1$ Nullstellen $x_0, ...x_n$. Daher muss $f-g$ nach Folgerung 3.7.3 das Nullpolynom sein, also $f=g$.

Zur Berechnung des Interpolationspolynoms kann man daher die Lagrange-Interpolationspolynome bestimmen und dann f wie oben angegeben berechnen.
Alternativ kann man mit $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ ansetzen und aus den Gleichungen

$$f(x_0) = y_0, ..., f(x_n) = y_n$$

ein lineares Gleichungssystem mit $n+1$ Gleichungen und den $n+1$ Unbekannten $a_n, ..., a_0$ erhalten. Dieses lineare Gleichungssystem hat nach dem vorstehenden Satz genau eine Lösung, nämlich die Koeffizienten des Interpolationspolynoms.

Nun folgt ein Beispiel zu dem obigen Ansatz und zur Langrange-Interpolation:

Einschub 3.8.4. ... Beispiel zu Lagrange-Polynomen

$P_0(-1,6)$ also $(x_0, y_0) = (-1,6)$

$P_1(1,2)$ also $(x_1, y_1) = (1,2)$, $P_2(2,3)$ also $(x_2, y_2) = (2,3)$

$$p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$
$$= \frac{1}{6}(x^2-3x+2)$$

$$p_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(x^2-x-2)$$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}(x^2-1)$$

$$f(x) = y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + y_2 p_2(x)$$
$$= 6 \cdot \frac{1}{6}(x^2-3x+2) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-x-2) + 3 \cdot \frac{1}{3}(x^2-1)$$
$$= x^2 - 2x + 3$$

Kapitel 4

Zusammenfassung rückwärts I

Ziel dieses Abschnittes ist es, in einer Rückschau zu verdeutlichen, wie die einzelnen Abschnitte der Vorlesung zusammenhängen und aufeinander aufbauen.

Polynome (3.6.1.) sind Funktionen vom Typ

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Man kann mit ihnen wie mit den ganzen Zahlen bzw. wie mit Variablen rechnen, indem man die Terme zu den Potenzen koeffizientenweise addiert und beim Multiplizieren Klammern ausmultipliziert (3.6.7.). Division von Polynomen ergibt analog zu den ganzen Zahlen die Polynomdivision mit Rest (3.6.8.). Eine Polynomdivision durch Linearfaktoren $x-x_i$, die den Rest Null ergibt, nennt man Abspalten von Nullstellen (3.7.1.) von Polynomen. Jede Nullstelle x_i eines Polynoms läßt sich so abspalten und ergibt eine neue Darstellung $f(x) = (x - x_i)g(x)$ des Polynoms f mit einem neuen Polynom g kleineren Grades (3.7.2.). Die Nullstellen von g sind Nullstellen von f und durch Wiederholung des Verfahrens erhält man die reelle Produktdarstellung eines Polynoms f, nämlich

$$f(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2}...(x - x_k)^{n_k} q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_m(x)$$

wobei $x_1, \ldots, x_k$ die paarweise verschieden Nullstellen von f und $q_1, \ldots, q_m$ quadratische Funktionen ohne reelle Nullstellen sind (3.7.5.).
Eine Anwendung von Polynomfunktionen ist die Interpolation. Dabei ist zu $n + 1$ Punkten in einem Koordinatensystem ein Polynom vom Grad n gesucht, dass durch diese Punkte verläuft (3.8.1.). Die Lagrangepolynome liefern ein solches Polynom (3.8.2.).

Polynome sind also Produkte von linearen und quadratischen Funktionen. Beide Typen haben wir vorher intensiv untersucht.
Quadratische Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ haben ein lokales Extremum am Scheitelpunkt (d, e) je nachdem, ob der Graph nach oben oder nach unten geöffnet ist (3.3.4.). An der Scheitelpunktsform $f(x) = a(x - d) + e$ läßt sich die Extremstelle d und der Extremwert $e = f(d)$ ablesen (3.0.4./3.0.5.). Für $a < 0$ ist die Funktion links vom Scheitelpunkt streng monoton wachsend und rechts vom Scheitelpunkt streng monoton fallend (3.4.2.). Umgekehrt für $a > 0$. Die Nullstellen x_1, x_2 einer quadratischen Funktion sind weitere charakteristische Punkte. Sie lassen sich an der Linearfaktorzerlegung $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ ablesen (3.2.4.). Die Nullstellen errechnet man mit der p-q-Formel (3.1.5.). Die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ entscheidet, wie viele Nullstellen (keine, eine oder zwei) es gibt (3.1.3.).
Rechnerisch erhält man die Scheitelpunktsform durch quadratisches Ergänzen (3.0.4.) aus $ax^2 + bx + c$ und die Linearfaktorzerlegung durch Berechnung de Nullstellen von f. Letzteres verwendet man dann auch, wenn man allgemeine Polynome wie oben in Linearfaktoren zerlegen will, sobald nur noch ein quadratisches Polynom nach der Polynomdivision übrig bleibt (3.7.1.).
Graphisch ensteht eine quadratische Funktion durch Verschieben längs der Koordinatenachsen und Strecken/Stauchen aus dem Graphen der Normalparabel x^2 (3.0.4.). Diesen Prozess nennt man lineares Skalieren.

Quadratische Funktionen haben Anwendungen bei Berechnung von Dreiecksflächen (3.5.5.) und physikalischen Phänomenen wie Bremsen (3.5.7.) oder Werfen (3.5.9.). Dabei wächst die Fläche bzw. die Wegstrecke jeweils quadratisch (Weg-Zeit-Gesetz einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung).

Lineare Funktionen sind von der Gestalt $f(x) = ax + b$. Ist die Steigung $a < 0$, so ist sie streng monoton fallend, für $a > 0$ streng monoton wachsend (2.7.3.). Für $a = 0$ handelt es sich um eine konstante Funktion. Die Steigung a ergibt sich aus einem Steigungsdreieck (2.2.2.). Dabei können die Stellen x_1, x_2 für das Steigungsdreieck beliebig gewählt werden und die Steigung a ergibt sich aus dem Verhältnis der Kathetenlängen des rechtwinkligen Dreiecks. Lineare Funktionen haben keine lokalen Extrema, allerdings können stückweise lineare Funktionen lokale Extrema an den Rändern der stückweise definierten Definitionsbereiche haben (2.9.1.). Lineare Funktionen haben genau eine Nullstelle $-\frac{b}{a}$ (2.5.), sofern sie nicht konstant sind. Die Umkehrfunktion einer linearen Funktion ist wieder eine lineare Funktion (2.6.).

Für $b = 0$ ergeben sich die proportionalen Funktionen (2.1.1.), die viele Anwendungen haben wie gleichförmige Bewegung, Umrechnung von Einheiten oder Dreisatz im allgemeinen (2.1.5.). Die Steigung a einer solchen Funktion f heißt Proportionalitätsfaktor und es gilt $a = f(1)$.

Analog zu den quadratischen Funktionen geht eine lineare Funktion durch lineares Skalieren aus der Funktion $f(x) = x$ hervor (2.10.6.).

Der Graph einer linearen Funktion ist eindeutig durch eine Gerade durch zwei Punkte im Koordinatensystem gegeben. Dies ist ein Spezialfall der Interpolation von Polynomen. Mit der Zwei-Punkte-Form (2.3.2.) läßt sich die Funktionsgleichung direkt angeben. Auf der anderen Seite ist der Graph einer linearen Funktion auch eindeutig durch die Steigung a und einen Punkt gegeben, der auf der Geraden liegen soll (Punkt-Steigungs-Form 2.3.1.).

In Anwendungen werden häufig Schnittpunkte von Graphen linearer Funktionen gesucht. Diese erhält man durch Gleichsetzen und Auflösen nach x oder durch allgemein hergeleitete Formeln (2.8.).

Allgemeine Polynome und ihre Spezialfälle (lineare Funktion, quadratische Funktion) sind sogenannte 'Funktionen'. Funktionen $f : A \to B$ sind Abbildungen, für die $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ gilt (1.4.20.). Eine Abbildung Γ ist eine Relation (= Teilmenge) $\Gamma \subset A \times B$, so dass jedes $a \in A$ höchstens zu einem Element $b \in B$ in Relation steht (1.4.17.).

Damit ist eine Funktion eine spezielle Relation. Es gibt noch andere Relationen auf Mengen, zum Beispiel die Ordnungsrelation (1.4.12.) oder die Äquivalenzrelation (1.4.8.).

Kapitel 5

Weitere wichtige Funktionen

5.1 Umkehrfunktionen, Wurzelfunktionen

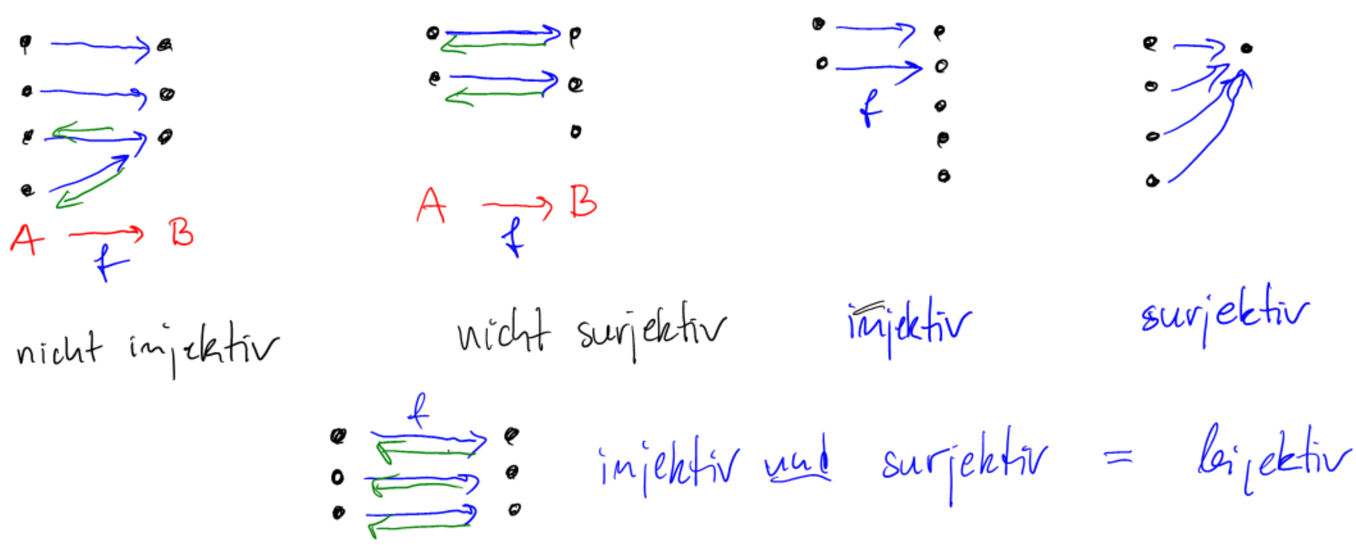
Wir hatten bereits beobachtet, dass Umkehrfunktionen zu Funktionen im Allgemeinen nicht immer existieren. Unter welchen Bedingungen das aber der Fall ist, untersuchen wir in dem folgenden Abschnitt.

5.1.1 Bijektivität

Erinnerung: In der Definition einer Funktion $f\colon A \to B$ haben wir verlangt, dass **jedem** Element $x \in A$ **genau ein** Element $y \in B$ zugeordnet wird. Wir haben von Funktionen **nicht** verlangt, dass

- verschiedene Elemente aus dem Defintionsbereich verschiedenen Elementen im Wertebereich zugeordnet werden müssen.
- alle Elemente im Wertebereich von einem Elemente im Definitionsbereichs getroffen werden müssen.

Einschub 5.1.1. ...



Wenn Funktionen diese Eigenschaften aber zusätzlich besitzen, nennen wir sie *surjektiv* bzw. *injektiv*. Formal:

Definition 5.1.2. Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt

- *surjektiv*, falls zu jedem $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ existiert mit $f(a) = b$.
- *injektiv*, falls aus $f(a) = b = f(a')$ stets $a = a'$ folgt. (Alternativ: $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$)
- *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

$a = a' \Leftarrow f(a) = f(a')$

Beispiele 5.1.3. Betrachtet man die Abbildung

$$f\colon A \to B, \quad x \mapsto x^2$$

so ist im Fall

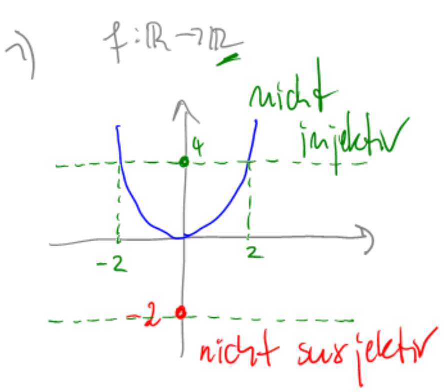
1) • $A = B = \mathbb{R}$ die Abbildung weder injektiv noch surjektiv.

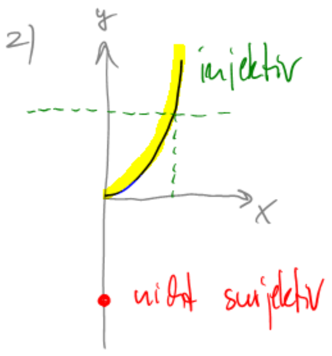
2) • $A = [0, \infty)$, $B = \mathbb{R}$ die Abbildung injektiv, aber nicht surjektiv.

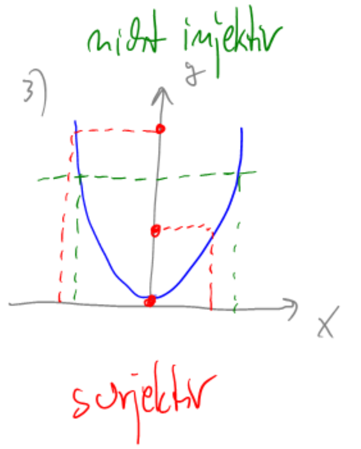
3) • $A = \mathbb{R}$, $B = [0, \infty)$ die Abbildung surjektiv, aber nicht injektiv.

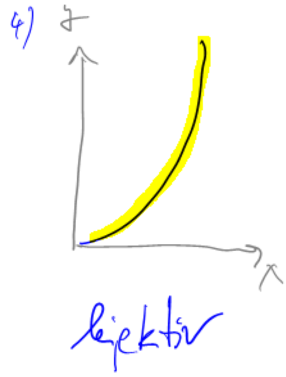
4) • $A = B = [0, \infty)$ die Abbildung bijektiv.

Einschub 5.1.4. ...









Bemerkung 5.1.5.

(i) Durch Verkleinern von Definitons- bzw. Wertebereich kann man Injektivität bzw. Surjektivität „erzwingen".

(ii) Ist für $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (oder fallend) auf D, so ist f injektiv.

Einschub 5.1.6. ... zz $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ Bew $x_1 \neq x_2$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 < x_2 & \xRightarrow{\text{Def. Monoton wachsend}} & f(x_1) < f(x_2) \\ x_2 < x_1 & \Longrightarrow & f(x_2) < f(x_1) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \square$$

(iii) Ist $f\colon A \to B$ bijektiv, so gilt also: surjektiv injektiv

Zu **jedem** $y \in B$ gibt es **genau ein** Urbild $x \in A$.

Diese Zuordnung erfüllt die Eigenschaften einer Funktion mit Definitionsbereich B und Wertebereich A und definiert damit die **Umkehrfunktion** f^{-1}:

$$f^{-1}\colon B \to A.$$

Ist $f\colon A \to B$ bijektiv, so kann man f also „umkehren", d.h. die Umkehrrelation

$$\Gamma^{-1}(f) := \{(f(x), x) \mid x \in A\}$$

ist eine Funktion von B nach A, die *Umkehrfunktion zu* f.

Insgesamt gilt also der

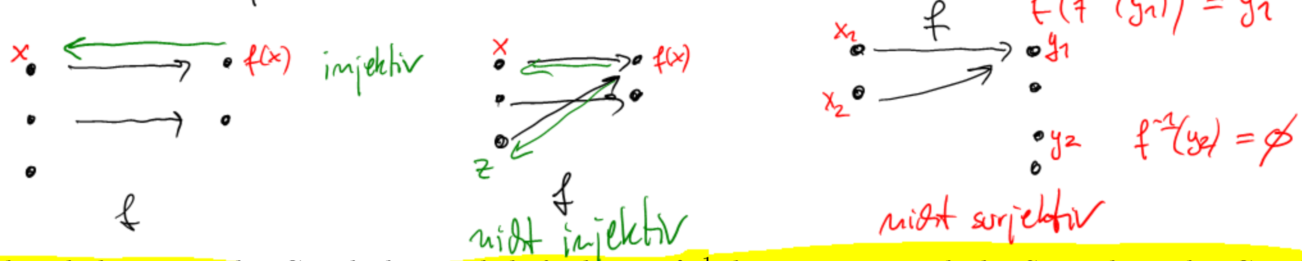
Satz 5.1.7. *Eine Funktion $f\colon A \to B$ ist genau dann umkehrbar, wenn sie bijektiv ist. Für die Umkehrfunktion*

$$f^{-1}\colon B \to A$$

gilt:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \quad \text{für alle } x \in A \leftarrow \text{injektiv} \\ f(f^{-1}(y)) &= y \quad \text{für alle } y \in B \leftarrow \text{surjektiv} \end{aligned}$$

Einschub 5.1.8. ... $f: A \to B$



Wie schon bekannt ist der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} dann geometrisch die Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden (d.h. an der Geraden zu $y = x$).

Beispiele 5.1.9.

(i) Zu $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto x^2$ ist f^{-1} die Quadratwurzelfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

(ii) Die Funktion zu $f(x) = ax + b$ ist für $a \neq 0$ stets bijektiv mit Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Bemerkung 5.1.10. Man kann Injektivität und Surjektivität einer Funktion $f\colon A \to B$ auch wie folgt interpretieren:
Betrachte die Gleichung

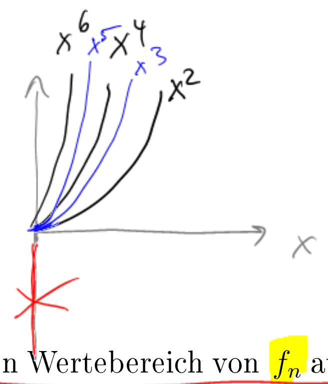
$$f(x) = y.$$

als Gleichung mit rechter Seite $y \in B$ für die Unbekannte $x \in A$.

f ist **surjektiv** bedeutet:
Gleichung ist für jede rechte Seite $y \in B$ lösbar.

f ist **injektiv** bedeutet:
Wenn Gleichung lösbar ist für eine rechte Seite $y \in B$, dann ist die Lösung x eindeutig.

f ist **bijektiv** bedeutet:
Gleichung ist für jede rechte Seite $y \in B$ eindeutig lösbar.



5.2 Wurzeln

Wie oben festgestellt sind für $n \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktionen

$$f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$$

streng monoton wachsend und entsprechend injektiv. Schränkt man den Wertebereich von f_n auf die Menge $[0,\infty)$ ein, so ist f_n auch surjektiv, also bijektiv und damit umkehrbar.

Definition 5.2.1. Die Umkehrfunktion von f_n definiert die *n-te Wurzelfunktion*:

$$f_n^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty), \quad x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

Für jedes $b \geq 0$ ist also $\sqrt[n]{b}$ die eindeutige nichtnegative Lösung x der Gleichung

$$x^n = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{b}.$$

$\sqrt[3]{125} = 5$

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$

5.3 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Eine Potenzfunktion zum Exponenten $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit einer Zuordnungsvorschrift vom Typ $f(x) = x^a$.

Bsp $a=2$: x^2, $a=\pi$: $x^\pi = f(x)$

Was verstehen wir unter x^a für $a \in \mathbb{R}$, z.B. $x^{\sqrt{2}}$? Wir definieren dies schrittweise:

(i) Für $a \in \mathbb{N}$ ist

$5 \in \mathbb{N}$

$$x^a = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{a \text{ Faktoren}}, \qquad \text{und außerdem } x^0 = 1.$$

$x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

Diese Definitionen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ zulässig.

(ii) Für $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, ist

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}}.$$

$a=-5$:

$x^{-5} = \frac{1}{x^{-(-5)}} = \frac{1}{x^5}$

Diese Defintion ist nur noch für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, möglich.

(iii) Für $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist $x^a = x^{\frac{1}{n}}$ das Urbild von x unter der bijektiven Funktion $f_n\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^n$. Wir schreiben dann

$$x^{\frac{1}{n}} := f_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

und speziell $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Diese Definition ist nur möglich für $x \in [0,\infty)$.

$x^{\frac{2}{3}} := \underbrace{(x^{1/3})}_{\text{kenne aus iii)}}{}^2 = (x^{1/3}) \cdot (x^{1/3}) = (\sqrt[3]{x})^2$

(iv) Für $a = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, ist

$$x^a = x^{\frac{m}{n}} := (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

Diese Defintion ist nur noch für $x \in (0,\infty)$ möglich.

(v) Für $a \in \mathbb{R}$ nähern wir a durch Brüche an, z.B. $a = \sqrt{2}$ durch

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots$$

und betrachten dann

$$x^1, x^{1,4}, x^{1,41}, x^{1,414}, \ldots .$$

Diese Werte nähern sich dann $x^{\sqrt{2}}$ an. Genaueres hierzu und insbesondere zu den auftretenden Grenzübergängen werden wir später lernen, wenn wir reelle Zahlenfolgen behandeln. Für den Moment genügt uns diese Anschauung.

Satz 5.3.1 (Rechenregeln für Potenzen)**.** *Seien $x, y \in (0,\infty)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Identitäten*

$$x^{a+b} = x^a \cdot x^b\,,$$
$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}\,,$$
$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a\,.$$

Definition 5.3.2. Für $a > 0$ heißt die Funktion $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ *Exponentialfunktion zur Basis a.*

Einschub 5.3.3. ...