Bemerkung 3.7.5. In den komplexen Zahlen gilt sogar der *Fundamentalsatz der Algebra*:

„Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt eine komplexe Nullstelle.“

Durch sukzessiven Abspalten der Nullstellen folgt, dass für jedes Polynom f vom Grad $n \geq 1$ komplexe Zahlen $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$ als Nullstellen von f mit

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

existieren.

Im Reellen kann man mithilfe dieser Überlegungen (in den komplexen Zahlen) zeigen, dass sich jedes Polynom in Linearfaktoren und quadratische Faktoren zerlegen lässt: Für jedes Polynom f vom Grad $n \geq 1$ mit reellen Koeffizienten und reellen Nullstellen $x_1, ..., x_k$ gibt es quadratische Funktionen $q_1, ..., q_m$ ohne reelle Nullstellen, so dass

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)q_1(x)...q_m(x) \qquad \textit{(Reelle Produktdarstellung)}$$

gilt.

3.8 Anwendung: Interpolation

Einschub 3.8.1. ...

(n+1 Punkte)

Satz 3.8.2. *Seien $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ Punkte mit paarweise verschiedenen x_i's. Dann gibt es genau ein Polynom f vom Grad höchstens n mit $f(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, 1, ..., n$. Diese Polynomfunktion f heißt* Interpolationspolynom.

Zum Beweis der Existenz solcher Polynome betrachtet man die sogenannten *Lagrange-Interpolationspolynome*

$$p_i(x) := \frac{(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot ... \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x_i - x_n)}; \qquad i = 0, 1, ..., n,$$

für die gilt

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i = j \end{cases}.$$

$j \neq i$: $p_i(x_j) = 0$ denn im Zähler taucht $x_j - x_j = 0$ auf

Dann ist

$$f(x) := \sum_{j=0}^{n} y_j p_j(x) = y_0 p_0(x) + \dots + y_n p_n(x)$$

$j = i$: $p_i(x_i) = 1$ denn „alle Faktoren kürzen sich paarweise“

das gesuchte Polynom.

Einschub 3.8.3. ..."Beweis" Satz 3.8.2.

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^{n} y_j p_j(x_i) \overset{\text{denn } =0 \text{ für } i \neq j}{=} y_i \underbrace{p_i(x_i)}_{=1} = y_i$$

Die Eindeutigkeit einer solchen Darstellung zeigt man so: Sind f und g Interpolationspolynome, dann hat ist $f - g$ ein Polynom vom Grad höchstens n mit $n+1$ Nullstellen $x_0, ...x_n$. Daher muss $f - g$ nach Folgerung 3.7.3 das Nullpolynom sein, also $f = g$.

Zur Berechnung des Interpolationspolynoms kann man daher die Lagrange-Interpolationspolynome bestimmen und dann f wie oben angegeben berechnen.
Alternativ kann man mit $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ ansetzen und aus den Gleichungen

$$f(x_0) = y_0, ..., f(x_n) = y_n$$

ein lineares Gleichungssystem mit $n+1$ Gleichungen und den $n+1$ Unbekannten $a_n, ..., a_0$ erhalten. Dieses lineare Gleichungssystem hat nach dem vorstehenden Satz genau eine Lösung, nämlich die Koeffizienten des Interpolationspolynoms.

Nun folgt ein Beispiel zu dem obigen Ansatz und zur Langrange-Interpolation:

Einschub 3.8.4. ... Beispiel zu Lagrange-Polynomen

$P_0(-1,6)$ also $(x_0, y_0) = (-1,6)$

$P_1(1,2)$ also $(x_1, y_1) = (1,2)$, $P_2(2,3)$ also $(x_2, y_2) = (2,3)$

$$p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$
$$= \frac{1}{6}(x^2-3x+2)$$

$$p_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(x^2-x-2)$$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{1}{3}(x^2-1)$$

$$f(x) = y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + y_2 p_2(x)$$
$$= 6 \cdot \frac{1}{6}(x^2-3x+2) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-x-2) + 3 \cdot \frac{1}{3}(x^2-1)$$
$$= x^2 - 2x + 3$$

Kapitel 4

Zusammenfassung rückwärts I

Ziel dieses Abschnittes ist es, in einer Rückschau zu verdeutlichen, wie die einzelnen Abschnitte der Vorlesung zusammenhängen und aufeinander aufbauen.

Polynome (3.6.1.) sind Funktionen vom Typ

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Man kann mit ihnen wie mit den ganzen Zahlen bzw. wie mit Variablen rechnen, indem man die Terme zu den Potenzen koeffizientenweise addiert und beim Multiplizieren Klammern ausmultipliziert (3.6.7.). Division von Polynomen ergibt analog zu den ganzen Zahlen die Polynomdivision mit Rest (3.6.8.). Eine Polynomdivision durch Linearfaktoren $x - x_i$, die den Rest Null ergibt, nennt man Abspalten von Nullstellen (3.7.1.) von Polynomen. Jede Nullstelle x_i eines Polynoms läßt sich so abspalten und ergibt eine neue Darstellung $f(x) = (x - x_i)g(x)$ des Polynoms f mit einem neuen Polynom g kleineren Grades (3.7.2.). Die Nullstellen von g sind Nullstellen von f und durch Wiederholung des Verfahrens erhält man die reelle Produktdarstellung eines Polynoms f, nämlich

$$f(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2}...(x - x_k)^{n_k} q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_m(x)$$

wobei $x_1, \ldots, x_k$ die paarweise verschieden Nullstellen von f und $q_1, \ldots, q_m$ quadratische Funktionen ohne reelle Nullstellen sind (3.7.5.).

Eine Anwendung von Polynomfunktionen ist die Interpolation. Dabei ist zu $n + 1$ Punkten in einem Koordinatensystem ein Polynom vom Grad n gesucht, dass durch diese Punkte verläuft (3.8.1.). Die Lagrangepolynome liefern ein solches Polynom (3.8.2.).

Polynome sind also Produkte von linearen und quadratischen Funktionen. Beide Typen haben wir vorher intensiv untersucht.

Quadratische Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ haben ein lokales Extremum am Scheitelpunkt (d, e) je nachdem, ob der Graph nach oben oder nach unten geöffnet ist (3.3.4.). An der Scheitelpunktsform $f(x) = a(x - d) + e$ läßt sich die Extremstelle d und der Extremwert $e = f(d)$ ablesen (3.0.4./3.0.5.). Für $a < 0$ ist die Funktion links vom Scheitelpunkt streng monoton wachsend und rechts vom Scheitelpunkt streng monoton fallend (3.4.2.). Umgekehrt für $a > 0$. Die Nullstellen x_1, x_2 einer quadratischen Funktion sind weitere charakteristische Punkte. Sie lassen sich an der Linearfaktorzerlegung $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ablesen (3.2.4.). Die Nullstellen errechnet man mit der p-q-Formel (3.1.5.). Die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ entscheidet, wie viele Nullstellen (keine, eine oder zwei) es gibt (3.1.3.).

Rechnerisch erhält man die Scheitelpunktsform durch quadratisches Ergänzen (3.0.4.) aus $ax^2 + bx + c$ und die Linearfaktorzerlegung durch Berechnung de Nullstellen von f. Letzteres verwendet man dann auch, wenn man allgemeine Polynome wie oben in Linearfaktoren zerlegen will, sobald nur noch ein quadratisches Polynom nach der Polynomdivision übrig bleibt (3.7.1.).

Graphisch ensteht eine quadratische Funktion durch Verschieben längs der Koordinatenachsen und Strecken/Stauchen aus dem Graphen der Normalparabel x^2 (3.0.4.). Diesen Prozess nennt man lineares Skalieren.

Quadratische Funktionen haben Anwendungen bei Berechnung von Dreiecksflächen (3.5.5.) und physikalischen Phänomenen wie Bremsen (3.5.7.) oder Werfen (3.5.9.). Dabei wächst die Fläche bzw. die Wegstrecke jeweils quadratisch (Weg-Zeit-Gesetz einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung).

Lineare Funktionen sind von der Gestalt $f(x) = ax + b$. Ist die Steigung $a < 0$, so ist sie streng monoton fallend, für $a > 0$ streng monoton wachsend (2.7.3.). Für $a = 0$ handelt es sich um eine konstante Funktion. Die Steigung a ergibt sich aus einem Steigungsdreieck (2.2.2.). Dabei können die Stellen x_1, x_2 für das Steigungsdreieck beliebig gewählt werden und die Steigung a ergibt sich aus dem Verhältnis der Kathetenlängen des rechtwinkligen Dreiecks. Lineare Funktionen haben keine lokalen Extrema, allerdings können stückweise lineare Funktionen lokale Extrema an den Rändern der stückweise definierten Definitionsbereiche haben (2.9.1.). Lineare Funktionen haben genau eine Nullstelle $-\frac{b}{a}$ (2.5.), sofern sie nicht konstant sind. Die Umkehrfunktion einer linearen Funktion ist wieder eine lineare Funktion (2.6.).

Für $b = 0$ ergeben sich die proportionalen Funktionen (2.1.1.), die viele Anwendungen haben wie gleichförmige Bewegung, Umrechnung von Einheiten oder Dreisatz im allgemeinen (2.1.5.). Die Steigung a einer solchen Funktion f heißt Proportionalitätsfaktor und es gilt $a = f(1)$.

Analog zu den quadratischen Funktionen geht eine lineare Funktion durch lineares Skalieren aus der Funktion $f(x) = x$ hervor (2.10.6.).

Der Graph einer linearen Funktion ist eindeutig durch eine Gerade durch zwei Punkte im Koordinatensystem gegeben. Dies ist ein Spezialfall der Interpolation von Polynomen. Mit der Zwei-Punkte-Form (2.3.2.) läßt sich die Funktionsgleichung direkt angeben. Auf der anderen Seite ist der Graph einer linearen Funktion auch eindeutig durch die Steigung a und einen Punkt gegeben, der auf der Geraden liegen soll (Punkt-Steigungs-Form 2.3.1.).

In Anwendungen werden häufig Schnittpunkte von Graphen linearer Funktionen gesucht. Diese erhält man durch Gleichsetzen und Auflösen nach x oder durch allgemein hergeleitete Formeln (2.8.).

Allgemeine Polynome und ihre Spezialfälle (lineare Funktion, quadratische Funktion) sind sogenannte 'Funktionen'. Funktionen $f : A \to B$ sind Abbildungen, für die $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ gilt (1.4.20.). Eine Abbildung Γ ist eine Relation (= Teilmenge) $\Gamma \subset A \times B$, so dass jedes $a \in A$ höchstens zu einem Element $b \in B$ in Relation steht (1.4.17.).

Damit ist eine Funktion eine spezielle Relation. Es gibt noch andere Relationen auf Mengen, zum Beispiel die Ordnungsrelation (1.4.12.) oder die Äquivalenzrelation (1.4.8.).

Kapitel 5

Weitere wichtige Funktionen

5.1 Umkehrfunktionen, Wurzelfunktionen

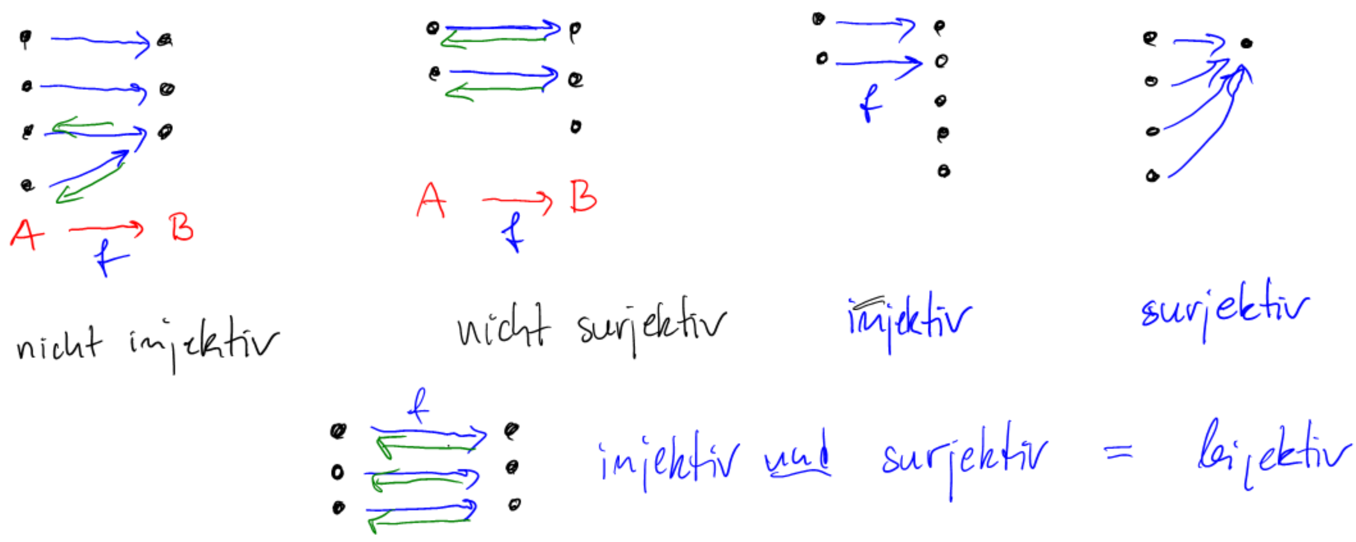
Wir hatten bereits beobachtet, dass Umkehrfunktionen zu Funktionen im Allgemeinen nicht immer existieren. Unter welchen Bedingungen das aber der Fall ist, untersuchen wir in dem folgenden Abschnitt.

5.1.1 Bijektivität

Erinnerung: In der Definition einer Funktion $f\colon A \to B$ haben wir verlangt, dass **jedem** Element $x \in A$ **genau ein** Element $y \in B$ zugeordnet wird. Wir haben von Funktionen **nicht** verlangt, dass

- verschiedene Elemente aus dem Defintionsbereich verschiedenen Elementen im Wertebereich zugeordnet werden müssen.
- alle Elemente im Wertebereich von einem Elemente im Definitionsbereichs getroffen werden müssen.

Einschub 5.1.1. ...



Wenn Funktionen diese Eigenschaften aber zusätzlich besitzen, nennen wir sie *surjektiv* bzw. *injektiv*. Formal:

Definition 5.1.2. Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt

- *surjektiv*, falls zu jedem $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ existiert mit $f(a) = b$.
- *injektiv*, falls aus $f(a) = b = f(a')$ stets $a = a'$ folgt. (Alternativ: $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$)
- *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

$a = a' \Leftarrow f(a) = f(a')$

Beispiele 5.1.3. Betrachtet man die Abbildung

$$f\colon A \to B, \quad x \mapsto x^2$$

so ist im Fall

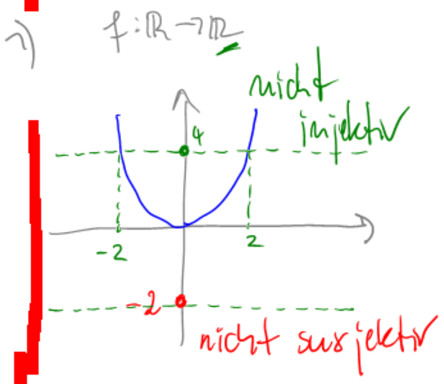
1) • $A = B = \mathbb{R}$ die Abbildung weder injektiv noch surjektiv.

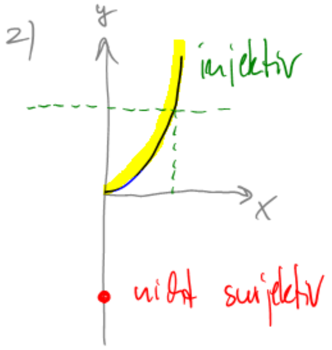
2) • $A = [0, \infty)$, $B = \mathbb{R}$ die Abbildung injektiv, aber nicht surjektiv.

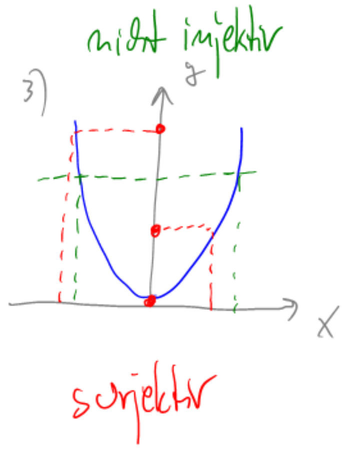
3) • $A = \mathbb{R}$, $B = [0, \infty)$ die Abbildung surjektiv, aber nicht injektiv.

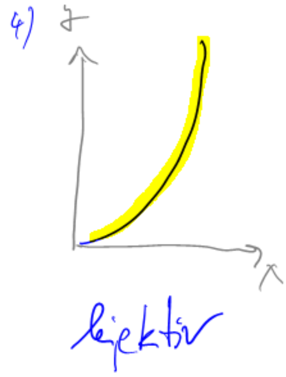
4) • $A = B = [0, \infty)$ die Abbildung bijektiv.

Einschub 5.1.4. ...









Bemerkung 5.1.5.

(i) Durch Verkleinern von Definitons- bzw. Wertebereich kann man Injektivität bzw. Surjektivität „erzwingen".

(ii) Ist für $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (oder fallend) auf D, so ist f injektiv.

Einschub 5.1.6. ... zz $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ Bew $x_1 \neq x_2$

Def. Monoton wachsend

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \square$$

(iii) Ist $f\colon A \to B$ bijektiv, so gilt also: surjektiv   injektiv

Zu **jedem** $y \in B$ gibt es **genau ein** Urbild $x \in A$.

Diese Zuordnung erfüllt die Eigenschaften einer Funktion mit Definitionsbereich B und Wertebereich A und definiert damit die **Umkehrfunktion** f^{-1}:

$$f^{-1}\colon B \to A.$$

Ist $f\colon A \to B$ bijektiv, so kann man f also „umkehren", d.h. die Umkehrrelation

$$\Gamma^{-1}(f) := \{(f(x), x) \mid x \in A\}$$

ist eine Funktion von B nach A, die *Umkehrfunktion zu* f.

Insgesamt gilt also der

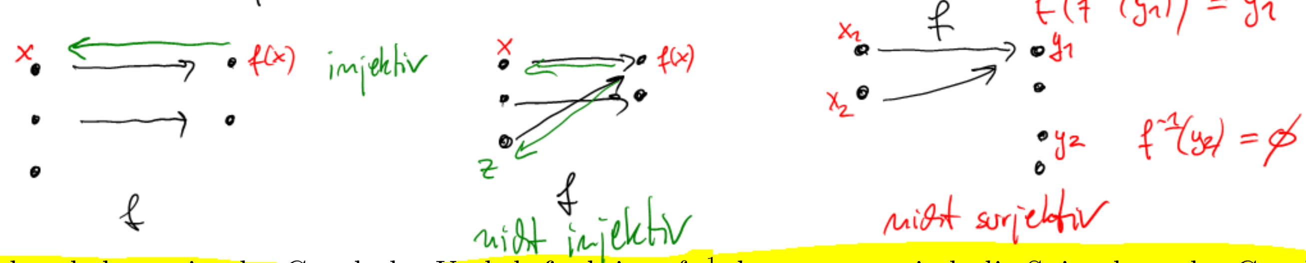
Satz 5.1.7. *Eine Funktion $f\colon A \to B$ ist genau dann umkehrbar, wenn sie bijektiv ist. Für die Umkehrfunktion*

$$f^{-1}\colon B \to A$$

gilt:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \quad \text{für alle } x \in A \leftarrow \text{injektiv} \\ f(f^{-1}(y)) &= y \quad \text{für alle } y \in B \leftarrow \text{surjektiv} \end{aligned}$$

Einschub 5.1.8. ... $f\colon A \to B$



Wie schon bekannt ist der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} dann geometrisch die Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden (d.h. an der Geraden zu $y = x$).

Beispiele 5.1.9.

(i) Zu $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto x^2$ ist f^{-1} die Quadratwurzelfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

(ii) Die Funktion zu $f(x) = ax + b$ ist für $a \neq 0$ stets bijektiv mit Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Bemerkung 5.1.10. Man kann Injektivität und Surjektivität einer Funktion $f\colon A \to B$ auch wie folgt interpretieren:
Betrachte die Gleichung

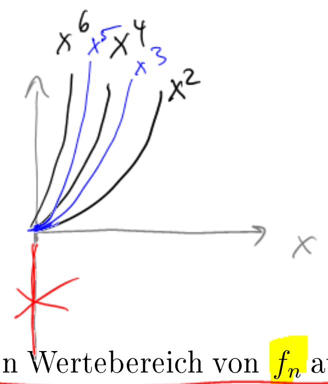
$$f(x) = y.$$

als Gleichung mit rechter Seite $y \in B$ für die Unbekannte $x \in A$.

f ist **surjektiv** bedeutet:
Gleichung ist für jede rechte Seite $y \in B$ lösbar.

f ist **injektiv** bedeutet:
Wenn Gleichung lösbar ist für eine rechte Seite $y \in B$, dann ist die Lösung x eindeutig.

f ist **bijektiv** bedeutet:
Gleichung ist für jede rechte Seite $y \in B$ eindeutig lösbar.



5.2 Wurzeln

Wie oben festgestellt sind für $n \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktionen

$$f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$$

streng monoton wachsend und entsprechend injektiv. Schränkt man den Wertebereich von f_n auf die Menge $[0,\infty)$ ein, so ist f_n auch surjektiv, also bijektiv und damit umkehrbar.

Definition 5.2.1. Die Umkehrfunktion von f_n definiert die *n-te Wurzelfunktion*:

$$f_n^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

Für jedes $b \geq 0$ ist also $\sqrt[n]{b}$ die eindeutige nichtnegative Lösung x der Gleichung

$$x^n = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{b}.$$

$\sqrt[3]{125} = 5$

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$

5.3 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Eine Potenzfunktion zum Exponenten $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit einer Zuordnungsvorschrift vom Typ $f(x) = x^a$.

Bsp $a=2$: x^2 , $a = \pi$: $x^\pi = f(x)$

Was verstehen wir unter x^a für $a \in \mathbb{R}$, z.B. $x^{\sqrt{2}}$? Wir definieren dies schrittweise:

(i) Für $a \in \mathbb{N}$ ist

$5 \in \mathbb{N}$

$$x^a = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{a \text{ Faktoren}}, \qquad \text{und außerdem } x^0 = 1.$$

$x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

Diese Definitionen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ zulässig.

(ii) Für $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, ist

$a = -5$:

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}}.$$

$x^{-5} = \frac{1}{x^{-(-5)}} = \frac{1}{x^5}$

Diese Defintion ist nur noch für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, möglich.

(iii) Für $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist $x^a = x^{\frac{1}{n}}$ das Urbild von x unter der bijektiven Funktion $f_n\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^n$. Wir schreiben dann

$$x^{\frac{1}{n}} := f_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

und speziell $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Diese Definition ist nur möglich für $x \in [0,\infty)$.

$x^{\frac{2}{3}} := \left(x^{1/3}\right)^2 = \left(x^{1/3}\right) \cdot \left(x^{1/3}\right)$

(iv) Für $a = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, ist

$$x^a = x^{\frac{m}{n}} := (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

kenne aus iii) $= \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$

Diese Defintion ist nur noch für $x \in (0,\infty)$ möglich.

(v) Für $a \in \mathbb{R}$ nähern wir a durch Brüche an, z.B. $a = \sqrt{2}$ durch

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots$$

und betrachten dann

$$x^1, x^{1{,}4}, x^{1{,}41}, x^{1{,}414}, \ldots .$$

Diese Werte nähern sich dann $x^{\sqrt{2}}$ an. Genaueres hierzu und insbesondere zu den auftretenden Grenzübergängen werden wir später lernen, wenn wir reelle Zahlenfolgen behandeln. Für den Moment genügt uns diese Anschauung.

Satz 5.3.1 (Rechenregeln für Potenzen). *Seien $x, y \in (0,\infty)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Identitäten*

$$x^{a+b} = x^a \cdot x^b\,,$$
$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}\,,$$
$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a\,.$$

Definition 5.3.2. Für $a > 0$ heißt die Funktion $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ *Exponentialfunktion zur Basis a*.

Einschub 5.3.3. ...

5.3 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Eine Potenzfunktion zum Exponenten $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit einer Zuordnungsvorschrift vom Typ $f(x) = x^a$.

Was verstehen wir unter x^a für $a \in \mathbb{R}$, z.B. $x^{\sqrt{2}}$? Wir definieren dies schrittweise:

(i) Für $a \in \mathbb{N}$ ist

$$x^a = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{a \text{ Faktoren}}, \qquad \text{und außerdem } x^0 = 1.$$

Diese Definitionen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ zulässig.

(ii) Für $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, ist

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}}.$$

Diese Defintion ist nur noch für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, möglich.

(iii) Für $a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, ist $x^a = x^{\frac{1}{n}}$ das Urbild von x unter der bijektiven Funktion $f_n\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^n$. Wir schreiben dann

$$x^{\frac{1}{n}} := f_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

und speziell $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Diese Definition ist nur möglich für $x \in [0,\infty)$.

(iv) Für $a = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, ist

$$x^a = x^{\frac{m}{n}} := (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

Diese Defintion ist nur noch für $x \in (0,\infty)$ möglich.

Einschub 5.3.1. Schritte (i) bis (iv) an einem Beispiel

I) $\underline{a \in \mathbb{N}}$ $\quad \left(\overbrace{-\tfrac{1}{3}}^{x}\right)^{\overbrace{5}^{a}} := -\frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3}$ $\quad \underline{x \in \mathbb{R}}$

II) $\underline{a \in \mathbb{Z}, a < 0}$ $\quad \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} := \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^4}$ $\quad \underline{x \in \mathbb{R}, x \neq 0}$

Definition

hier darf keine 0 stehen

IV) $\underline{a \in \mathbb{Q}}$ $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}} := \left(\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}}}\right)^4 = b \cdot b \cdot b \cdot b$ $\quad \underline{x \geq 0}$ (weil Wurzeln nicht negativ sein können in $\mathbb{R}$)

$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = b \Leftrightarrow b^5 = \frac{2}{3}$

(v) Für $a \in \mathbb{R}$ nähern wir a durch Brüche an, z.B. $a = \sqrt{2}$ durch

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots$$

und betrachten dann

Annähern durch Potenzen $\quad x^1, x^{1{,}4}, x^{1{,}41}, x^{1{,}414}, \ldots$.

Diese Werte nähern sich dann $x^{\sqrt{2}}$ an. Genaueres hierzu und insbesondere zu den auftretenden Grenzübergängen werden wir später lernen, wenn wir reelle Zahlenfolgen behandeln. Für den Moment genügt uns diese Anschauung.

Satz 5.3.2 (Rechenregeln für Potenzen)**.** *Seien $x, y \in (0,\infty)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Identitäten*

$$x^{a+b} = x^a \cdot x^b\,, \qquad \left(\tfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}+0{,}5} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{0{,}5}$$

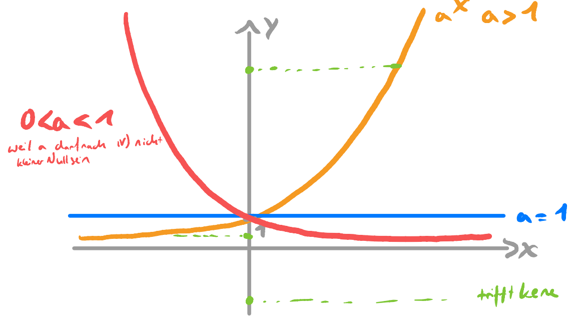
$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}\,, \qquad 3^{4^2} = 3^{(4^2)} = 3^{16}$$

$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a\,. \qquad (3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2}$$

Definition 5.3.3. Für $a > 0$ heißt die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ *Exponentialfunktion zur Basis a*.

Einschub 5.3.4. Graphen der Exponentialfunktion ← Variable in der Potenz und nicht x^a Rollentausch

$\boxed{\exp_a(x) := a^x}$, Variable ist nun in der Potenz (!)



5.3.1 Eigenschaften der Exponentialfunktion

(i) $\exp_a(0) = 1$
gelesen: exp a 0

(ii)

$$\exp_a(-x) \overset{\text{Def Einsetzen}}{=} a^{-x} \overset{\text{Def II)}}{=} \frac{1}{a^x} \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\exp_a(x)},$$

$$\exp_a(x+y) \overset{\text{Def. fakt}}{=} a^{x+y} \overset{\text{Potenzgesetze}}{=} a^x a^y \overset{\text{Def}}{=} \exp_a(x) \cdot \exp_a(y),$$ ← Nennt man Funktionalgleichung vom $\exp_a$

$$\exp_a(x)^y \overset{\text{Def}}{=} (a^x)^y \overset{\text{Potenzgesetze}}{=} a^{xy} \overset{\text{Def}}{=} \exp_a(x \cdot y)$$

(iii) $\exp_a$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend, für $0 < a < 1$ streng monoton fallend und für $a = 1$ konstant gleich 1.
↳ bedeutet injektiv

(iv) Für das Bild von $\mathbb{R}$ unter der Exponentialfunktion gilt für $a \neq 1$: $\exp_a(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.
Das Bild von $\exp_a = \exp_a(\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{gesamte Definitionsbereich}}) = (0, +\infty)$

Definition 5.3.5 (Logarithmus)**.** Aufgrund der letzten beiden Eigenschaften ist die Exponentialfunktion $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ bijektiv. Die Umkehrfunktion

Konstante ist nicht Umkehrbar

$$\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

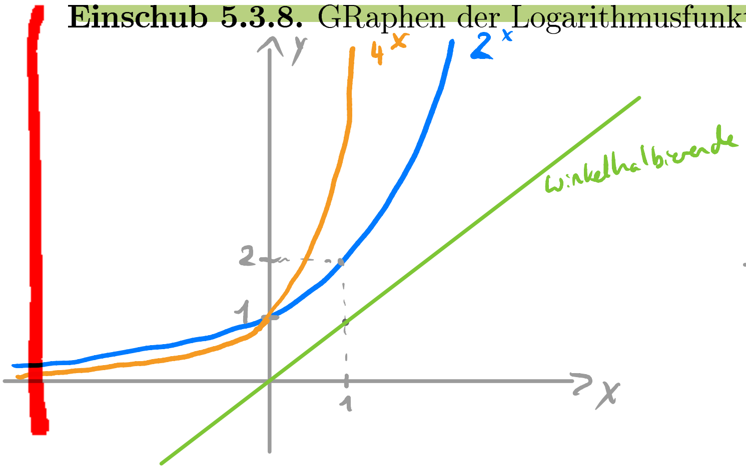
heißt *Logarithmus zur Basis a*.

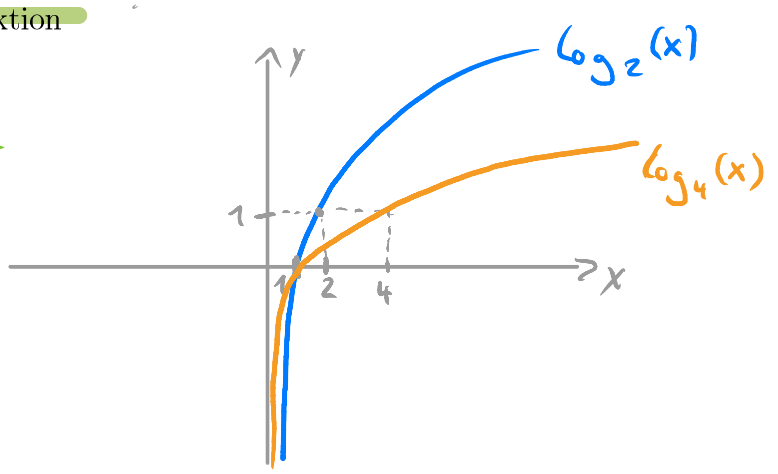
Bemerkung 5.3.6. Da der Logarithmus gemäß Definition die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion ist, gilt also:

Einschub 5.3.7. ...

$\exp_a(\underbrace{\log_a}_{\text{Umkehrfunkt}}(x)) = x$, $\log_a(\exp_a(x)) = x$

Einschub 5.3.8. GRaphen der Logarithmusfunktion





5.3.2 Eigenschaften der Logarithmusfunktion

Satz 5.3.9 (Rechenregel für Logarithmen)**.**

$$
\begin{aligned}
&(i) && \log_a(1) = 0 \\
&(ii) && \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \\
&(iii) && \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \\
&(iv) && \log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x), \qquad r \in \mathbb{R} \\
&(v) && \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}
\end{aligned}
$$

$\log_{\frac{1}{3}}(4^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(4)$

Basiswechsel beim Logarithmus

dadurch reicht es sich auf einen Fall zu spezialisieren

$\log_2(x) = \frac{\log_5(x)}{\log_5(2)}$

Wechsel zwei durch hier: Wechsel

Beliebige Zahl zu $a = 5$

Teil (v) heißt: ein Basiswechsel beim Logarithmus bedeutet eine lineare Skalierung (vertikales Strecken/Stauchen). Entsprechend reicht die genaue Betrachtung nur einer Basis.

Die Funktion $\log_a\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv, für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $a < 1$ streng monoton fallend.

Häufig werden die folgenden Basen verwendet:

- $a = 10$: *Zehnerlogarithmus* $\boxed{\log_{10} =: \log}$
- $a = 2$: *Zweierlogarithmus* $\boxed{\log_2 = \mathrm{ld}}$,
- $a = e$: *Natürlicher Logarithmus*, (e *Eulersche Zahl*, vgl. unten). Für den natürlichen Logarithmus schreiben wir $\boxed{\ln \text{ statt } \log_e}$.

Bemerkung 5.3.10 (Basiswechsel)**.** Jede andere Basis erhält man dann durch:

Streckfaktor

$\exp_a(x) = e^{\ln(a) \cdot x}$

$$\exp_a(x) = a^x \overset{\text{Einsetzen in } a^x}{=} \underbrace{(\exp_e(\log_e(a)))^x}_{5.3.7 \quad \exp_e(\log_e(a)) = a} = (\exp_e(\ln(a)))^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x \overset{\text{Potenzgesetz}}{=} e^{\ln(a) \cdot x},$$

d.h. jede Exponentialfunktion ist eine linear skalierte natürliche Exponentialfunktion (horizontales Strecken/Stauchen).

$\ln(e) = \log_e(e) = 1$

5.3.3 Exponentielles Wachstum

Betrachte die Funktion

$$f(x) = c \cdot a^x, \quad a > 0, \; a \neq 1,$$

dann gilt für ein festes $\Delta x \in \mathbb{R}$:

Einsetzen

$a^{\Delta x} = c_{\Delta x}$

$$f(x + \Delta x) = c \cdot a^{x + \Delta x} \overset{\text{Potenzgesetz}}{=} \underbrace{c \cdot a^x}_{=} \cdot a^{\Delta x} = f(x) \cdot a^{\Delta x} = c_{\Delta x} \cdot f(x),$$

wobei

$$c_{\Delta x} := a^{\Delta x}.$$

Eine Änderung des Arguments x um eine feste Größe Δx bewirkt daher eine *Multiplikation* mit einem von Δx (aber nicht von x) abhängigen, aber sonst festen Faktor $c_{\Delta x}$. Ein solches Wachstumsverhalten heißt *exponentielles Wachstum.*

Zum Vergleich bewirkt bei linearem Wachstum, beschrieben durch $l(x) = ax + b$, die Änderung des Arguments um Δx die *Addition* einer festen Größe, nämlich

Draufaddiert

$$l(x + \Delta x) = \underbrace{a(x + \Delta x) + b}_{\text{Einsetzen}} = \overbrace{ax + a\Delta x + b}^{= l(x)} = l(x) + a\Delta x.$$

Ist $a < 1$, ist f streng monoton fallend. In diesem Fall spricht man auch von *exponentiellem Abklingen.* Exponentielles Wachstum kommt typischerweise in Modellen für Wachstums- oder Zerfallsprozesse vor:

Beispiele

- Bevölkerungswachstum, Zellwachstum, radioaktiver Zerfall
- Berechnung von Zinseszinsmodellen, Modelle für Mehrfachverzinsung pro Jahr, kontinuierliche Verzinsung

In diesen Fällen wählt man häufig t als Variable für die Zeit. Diejenige Schrittweite Δt, für die

- $c_{\Delta t} = 2$ gilt, nennt man *Verdopplungszeit*
- $c_{\Delta t} = \frac{1}{2}$ gilt, nennt man *Halbwertszeit.*

Verdopplungszeit: $f(t+\Delta t) = \underbrace{c_{\Delta t}}_{=2} \cdot f(t)$

Halbwertszeit: $f(t+\Delta t) = \underbrace{c_{\Delta t}}_{=\frac{1}{2}} \cdot f(t)$

Für die Verdopplungszeit Δt gilt wegen

$$\boxed{f(t+\Delta t) = c_{\Delta t} \cdot f(x) = 2 \cdot f(t)}$$

folglich

$$a^{\Delta t} = c_{\Delta t} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta t = \log_a 2.$$

Entsprechend erhält man für die Halbwertszeit: $\Delta t = \log_a \frac{1}{2}$

Einschub 5.3.11. Beispiel zur Halbwertzeit

Hier steigen wir nächstes mal wieder ein

Verdopplungszeit

$a^{\Delta t} = 2 \quad | \log_a$

$\log_a(a^{\Delta t}) = \log_a(2)$

PG $\Rightarrow \Delta t \cdot \underbrace{\log_a(a)}_{=1} = \log_a(2)$

Wie oben dargestellt kann die Funktion f mithilfe der natürlichen Exponentialfunktion (*e-Funktion*) beschrieben werden, nämlich

$$f(x) = c \cdot a^x = c \cdot e^{\ln(a)\cdot x} = c \cdot e^{\lambda x}.$$

In diesem Fall heißt $c = f(0)$ *Anfangswert* und $\lambda \neq 0$ *Wachstumsrate* .
Exponentielles Wachstum ist schnell, insbesondere schneller als jedes polynomielle Wachstum. Logarithmisches Wachstum hingegen ist langsamer als jedes polynomielle Wachstum. Was dies präziser bedeutet klären wir im nächsten Kapitel.

Beispiele 5.3.12.

- *Bevölkerungswachstum:* In einem Modell für das Bevölkerungswachstum nehmen wir an, dass die Zunahme der Bevölkerung proportional mit Proportionalitätsfaktor p zur Größe der Bevölkerung $f(t)$ ist, d.h. es gilt:

  Kommt hinzu — Proportional zu dem was schon da war — Ausklammern

  $$\underbrace{f(t+1) - f(t)}_{\text{Kommt hinzu}} = p \cdot f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t+1) = (1+p) \cdot f(t)$$

  Gegeben die Größe n_0 der Bevölkerung zur Zeit $t = 0$, so erhalten wir

  $f(0) = n_0$ $\quad f(1) = f(0)\cdot(1+p) = n_0(1+p)$

  Daraus folgt

  $f_2 = (1+p)\, f(1) = (1+p)\cdot(n_0(1+p)) = n_0(1+p)^2$

  $$\boxed{f(t) = n_0 \cdot (1+p)^t}$$

  als exponentielles Modell für die Beschreibung der Bevölkerungsentwicklung. Die unbekannten Parameter p und n_0 müssen jetzt aus vorhandenen Daten bestimmt werden. Die Weltbevölkerung betrug 2010 etwa 6,96 Mrd. und 2020 etwa 7,79 Mrd. Menschen. Setzen wir den Zeitpunkt $t = 0$ für das Jahr 2010, so folgt:

  $$f(0) = n_0 = 6,96 \qquad \text{(in Mrd.)}$$

  und

  $$f(10) = \boxed{n_0 \cdot (1+p)^{10}} = 7,79, \qquad |: n_0$$

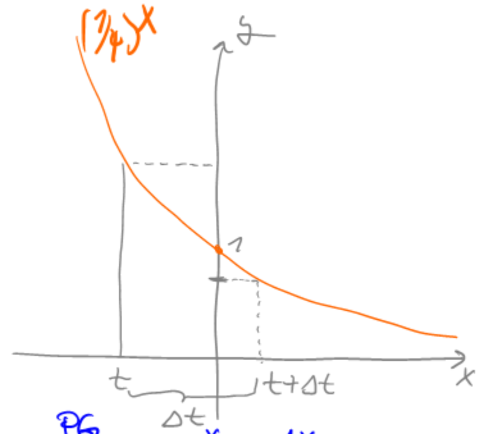
  $$\Rightarrow \quad (1+p)^{10} = \frac{7,79}{6,96} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt[10]{\frac{7,79}{6,96}} - 1 \approx 0,0113 = 1,13\%.$$

  Entsprechend verdoppelt sich die Bevölkerung in $\underbrace{\log_{1+p}}_{\text{Basis weil das hoch } t \text{ genommen wird}} 2 = \frac{\log 2}{\log(1+p)} \approx 61,5$ Jahren.

- Bevölkerungswachstum, Zellwachstum, radioaktiver Zerfall
- Berechnung von Zinseszinsmodellen, Modelle für Mehrfachverzinsung pro Jahr, kontinuierliche Verzinsung

In diesen Fällen wählt man häufig t als Variable für die Zeit. Diejenige Schrittweite Δt, für die

- $c_{\Delta t} = 2$ gilt, nennt man *Verdopplungszeit*
- $c_{\Delta t} = \frac{1}{2}$ gilt, nennt man *Halbwertszeit*.



Für die Verdopplungszeit Δt gilt wegen

$$f(t + \Delta t) = c_{\Delta t} \cdot f(x) = 2 \cdot f(t)$$

folglich

$$a^{\Delta t} = c_{\Delta t} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\Delta t = \log_a 2.}$$

Entsprechend erhält man für die Halbwertszeit: $\boxed{\Delta t = \log_a \frac{1}{2}}$

Einschub 5.3.11. Beispiel zur Halbwertzeit $\quad f(x) := 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$$f(x+\Delta x) = \frac{1}{2} f(x) \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \overset{PG}{\underset{:3}{\Leftrightarrow}} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{\Delta x} = \frac{1}{2} \overset{\log_{1/4}}{\Leftrightarrow} \log_{1/4}\left(\frac{1}{4}^{\Delta x}\right) = \log_{1/4}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\overset{LG}{\Leftrightarrow} \Delta x \cdot \overbrace{\log_{1/4}(1/4)}^{=1} = \log_{1/4}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \Delta x = \log_{1/4}\left(\frac{1}{2}\right) \overset{LG}{=} \log_{1/4}(1)$$

$$- \log_{1/4}(2) = - \log_{1/4}(2) \qquad \log_a(1) = 0$$

Wie oben dargestellt kann die Funktion f mithilfe der natürlichen Exponentialfunktion (*e-Funktion*) beschrieben werden, nämlich

$$f(x) = c \cdot a^x = c \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = c \cdot e^{\lambda x}.$$

$$a^x = \exp_e(\log_e(a^x)) = e^{(\ln a^x)} \overset{LG}{=} e^{x \cdot \ln(a)}$$

In diesem Fall heißt $c = f(0)$ *Anfangswert* und $\lambda \neq 0$ *Wachstumsrate* .
Exponentielles Wachstum ist schnell, insbesondere schneller als jedes polynomielle Wachstum. Logarithmisches Wachstum hingegen ist langsamer als jedes polynomielle Wachstum. Was dies präziser bedeutet klären wir im nächsten Kapitel.

Beispiele 5.3.12. am 28.11. behandelt

- *Bevölkerungswachstum:* In einem Modell für das Bevölkerungswachstum nehmen wir an, dass die Zunahme der Bevölkerung proportional mit Proportionalitätsfaktor p zur Größe der Bevölkerung $f(t)$ ist, d.h. es gilt:

$$f(t + 1) - f(t) = p \cdot f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t + 1) = (1 + p) \cdot f(t)$$

Gegeben die Größe n_0 der Bevölkerung zur Zeit $t = 0$, so erhalten wir

$$f(t) = n_0 \cdot (1 + p)^t$$

als exponentielles Modell für die Beschreibung der Bevölkerungsentwicklung. Die unbekannten Parameter p und n_0 müssen jetzt aus vorhandenen Daten bestimmt werden. Die Weltbevölkerung betrug 2010 etwa 6,96 Mrd. und 2020 etwa 7,79 Mrd. Menschen. Setzen wir den Zeitpunkt $t = 0$ für das Jahr 2010, so folgt:

$$f(0) = n_0 = 6,96 \qquad \text{(in Mrd.)}$$

und

$$f(10) = n_0 \cdot (1 + p)^{10} = 7,79,$$

$$\Rightarrow \quad (1 + p)^{10} = \frac{7,79}{6,96} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt[10]{\frac{7,79}{6,96}} - 1 \approx 0,0113 = 1,13\%.$$

Entsprechend verdoppelt sich die Bevölkerung in $\log_{1+p} 2 = \frac{\log 2}{\log(1+p)} \approx 61,5$ Jahren.

- *Zellwachstum:* Durch Zellteilung verdoppelt sich die Zahl der Zellen in einer gegebenen Zeitspanne Δt, d.h. die Verdopplungszeit ist mit Δt gegeben. Entsprechend kann man im Wachstumsmodell für die Anzahl der Zellen

$$N(t) = N_0\, a^t \qquad N(0) = N_0 \cdot a^0 = N_0$$

mit Anfangszellenzahl N_0 die Basis a bestimmen durch

$$a^{\Delta t} = 2 \Leftrightarrow a = 2^{\frac{1}{\Delta t}}.$$

"hoch $\frac{1}{\Delta t}$"

$$a^{\Delta t} = 2 \Leftrightarrow (a^{\Delta t})^{1/\Delta t} = 2^{1/\Delta t} \overset{PG}{\Leftrightarrow} a^{\overbrace{\Delta t \cdot \frac{1}{\Delta t}}^{=1}} = 2^{1/\Delta t}$$

Es gilt also

$$N(t) = N_0 \cdot (\overbrace{2^{\frac{1}{\Delta t}}}^{=a})^t = N_0 \cdot 2^{t/\Delta t}. =$$

Wählt in dem Modell man die Eulersche Zahl als Basis, so erhalten wir $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$ mit der Wachstumsrate $\lambda = \frac{\ln 2}{\Delta t}$, denn:

$$= N_0 \cdot (\underbrace{2^{1/\Delta t}}_{=a})^t \quad \Rightarrow \quad \lambda = \ln(a) = \ln\left(2^{1/\Delta t}\right) \overset{PG}{=} \frac{1}{\Delta t} \cdot \ln(2) = \frac{\ln(2)}{\Delta t}$$

s.oben

- *Radioaktiver Zerfall:* Sei $N(t)$ die Anzahl radioaktiver Kerne zur Zeit t. Wir nehmen an, dass die Anzahl der zerfallenden Atome pro Zeiteinheit proportional zu der Anzahl vorhandener Atome ist.

Wie im ersten Beispiel erhalten wir exponentielles Wachstum, hier mit negativer Wachstumsrate, also ein exponentielles Abklingen. Entsprechend setzen wir folgendes Modell an:

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}, \quad \text{mit } \lambda > 0.$$

Die Halbwertszeit Δt ist die Zeitspanne, in der sich die Anzahl Atome halbiert, also für die $e^{-\lambda \Delta t} = \frac{1}{2}$ gilt. Logarithmieren liefert mithilfe der Logarithmengesetze die Gleichung

$$\Delta t = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

$$e^{-\lambda \Delta t} = \frac{1}{2} \overset{\ln}{\Leftrightarrow} -\lambda \Delta t = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-\lambda} = \frac{\overbrace{\ln 1}^{=0} - \ln 2}{-\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

- *Zinseszinsmodell:* Ein Anfangsguthaben K_0 wird jährlich mit Zinsrate p verzinst. Wird das Guthaben nicht verändert, verfügt man dank Zinseszins nach n Jahren über ein Guthaben in Höhe von

$$K(n) = (1+p)^n \cdot K_0.$$

Bsp $p = 0{,}17$, $100 = K_0$

$K_1 = (1+0{,}17) \cdot 100 = 1{,}17 \cdot 100$

$$K(0) = (1+p)^0 K_0 = K_0, \quad K(1) = (1+p) K_0, \quad K(2) = (1+p) K(1) = (1+p)^2 K_0$$

Bei unterjähriger Verzinsung wird innerhalb eines Jahres das Kapital m Mal verzinst (z.B. bei $m = 4$ quartalsweise, bei $m = 12$ monatlich usw.). Geschieht dies mit dem *Nominalzins* $p\,\%$ bedeutet das, dass das Kapital im Jahr m mal mit $\frac{p}{m}\%$ verzinst wird, d.h. am Ende des Jahres beträgt das Guthaben $\left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^m \cdot K_0$. Das entspricht einer Verzinsung mit $\left(\left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^m - 1\right) \cdot 100\%$. Diesen Zins nennt man *effektiven Jahreszins*.

$= 1{,}28$

$= 0{,}28 \quad \hat{=} \quad 28\%$

$m = 2 \qquad p \;\hat{=}\; 3\%$ Verzinsung

nach $\frac{1}{2}$ Jahr $\qquad K_0 \cdot \left(1 + \frac{p/2}{100}\right) = K_0 \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right)$

nach 1 Jahr $\quad K_0\left(1+\frac{p/2}{100}\right)^2 = K_0\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)^2$

mit p % jährlich verzinsen, ist das weniger, denn:

$$\left(1+\frac{p/2}{100}\right)^2 \overset{\text{Bin}}{=} 1+\frac{p}{100}+\underbrace{\left(\frac{p/2}{100}\right)^2}_{>0} > 1+\frac{p}{100}$$

5.4 Trigonometrische Funktionen

Ziel "sin" und "cos" als Funktionen verstehen

Ist in einem rechtwinkligen Dreieck ein weiterer Winkel α bekannt, so ist auch der dritte Winkel bekannt (Innenwinkelsumme) und folglich sind je zwei solche Dreiecke ähnlich.

Damit müssen sie nicht gleichen Seitenlängen besitzen, aber die Verhältnisse der Seitenlängen sind gleich und hängen damit nur von dem Winkel α ab.

Man nennt

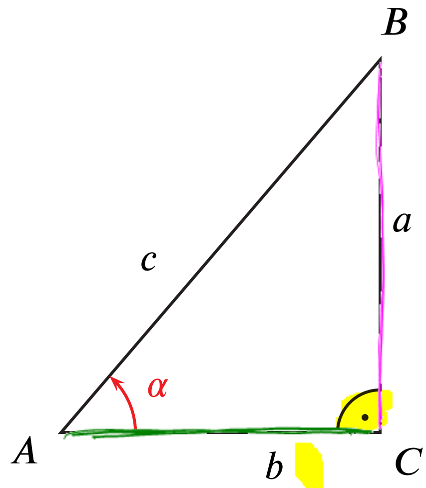
die dem Winkel α gegenüberliegende Seite die **Gegenkathete** (G)	Länge: a
die am Winkel α anliegende Seite die **Ankathete** (A)	Länge: b
die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die **Hypotenuse** (H)	Länge: c

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \;\text{"="}\; \frac{G}{H}$$

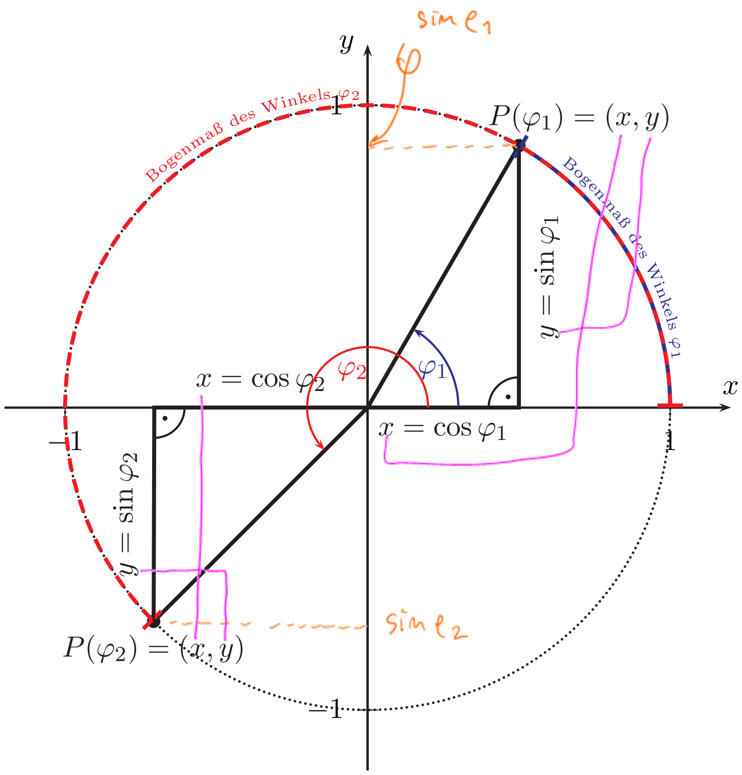
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \;\text{"="}\; \frac{A}{H}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{"}\frac{G}{A}\text{"}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b}$$



Wählt man speziell für die Hypotenusenlänge $c = 1$, so lassen sich die Werte von Sinus und Kosinus veranschaulichen, indem man das Dreieck in den Einheitskreis einpasst (mit der Hypotenuse als Radius):



$$\sin\varphi_1 = \frac{\text{"G"}}{H} = \frac{a}{c} = a$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\text{"A"}}{H} = \frac{b}{c} = b$$

Pythagoras:

$$(\cos\varphi_1)^2 + (\sin\varphi_1)^2 = 1^2 = 1$$

Bogenmaß:

$$\frac{\varphi_1}{360} = \frac{x}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi\cdot\varphi_1}{360}$$

2π = Umfang Einheitskreis

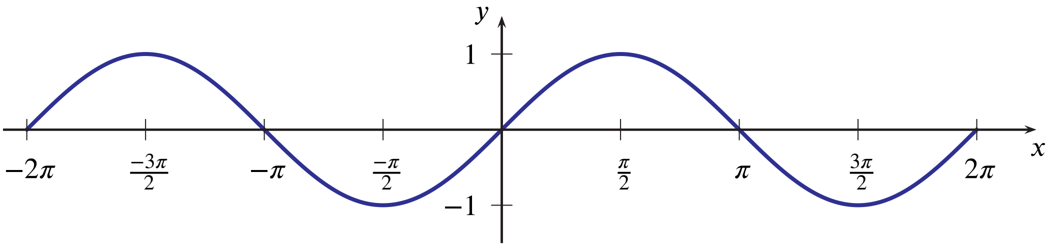
Meistens geben wir Winkel im Bogenmaß an. Das ist die Länge des Bogenstücks am Einheitskreis, das dem Winkel zugeordnet ist. Ist ein Winkel ϕ im Gradmaß gegeben, so berechnet sich das zugehörige Bogenmaß t mit der Formel

$$t = \frac{\phi}{360°}\cdot 2\pi\,.$$

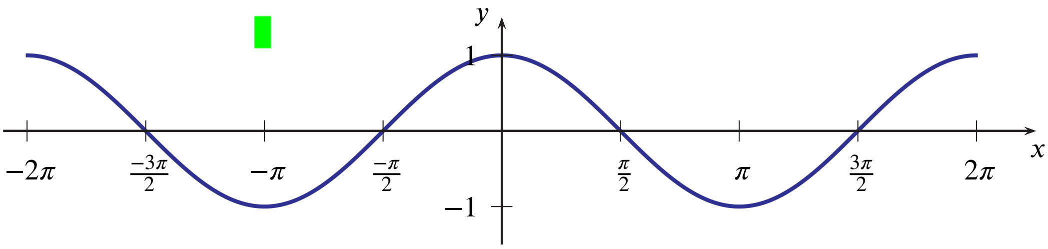
s. oben

Auf diese Weise erhält man die trigonometrischen Funktionen

$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

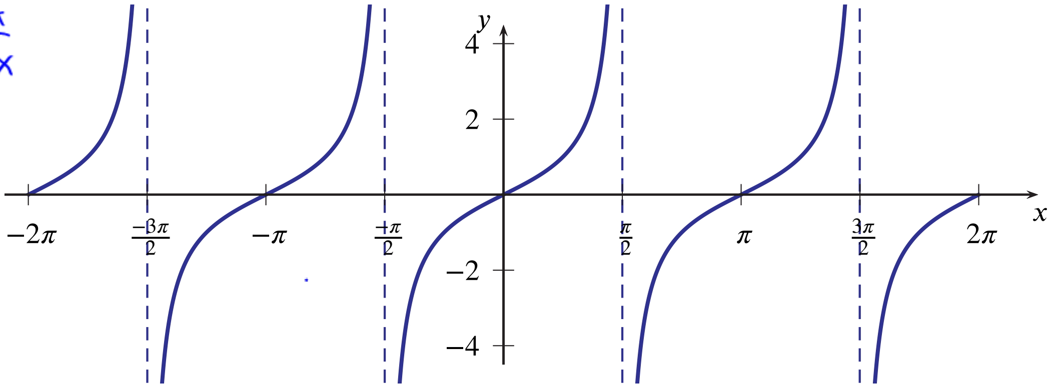


$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



$\tan : \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} \to \mathbb{R}$

$\tan(x) := \frac{\sin x}{\cos x}$



Hier ist ein schönes Applet, mit Hilfe dessen man die trigonometrischen Funktionen veranschaulichen kann:
https://www.geogebra.org/m/FJtrEDAr

Kapitel 6

Konvergenz von Zahlenfolgen

Motivation: Warum reichen die rationalen Zahlen nicht aus?

Da man in $\mathbb{Q}$ uneingeschränkt Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und (außer durch 0) Dividieren kann, sind *lineare Gleichungen*, also Gleichungen der Form $ax + b = 0$ für $a \neq 0$, in $\mathbb{Q}$ stets lösbar. Das Quadrieren kann in $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen nicht rückgängig gemacht werden, d.h. (selbst) für $a > 0$ ist die Gleichung $x^2 - a = 0$ in $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen nicht lösbar:

Satz 6.0.1. *Eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ ist keine rationale Zahl.*
Die positive Lösung der Gleichung, die in den reellen Zahlen existiert, bezeichnen wir mit $\sqrt{2}$ („Wurzel 2").

Einschub 6.0.2. ... Beweis Annahme $\sqrt{2} = p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ im gekürzter Form. Dann gilt: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow q\sqrt{2} = p$

$\Rightarrow q^2 \cdot 2 = p^2 \Rightarrow p^2$ gerade $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ p gerade $\Rightarrow$ es gibt Zahl $r \in \mathbb{N}$: $p = 2r \Rightarrow p^2 = 4r^2 \Rightarrow q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{4r^2}{2} = 2r^2$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ q^2 gerade $\Rightarrow q$ gerade. Also p gerade und q ist gerade, also p/q ungekürzt im Widerspruch zur Annahme

Bleibt $(*)$ $z \in \mathbb{N}$ ungerade $\Rightarrow$ es gibt $s \in \mathbb{N}$: $z = 2s + 1$

$\Rightarrow z^2 = (2s+1)^2 = 4s^2 + 2s + 1 = 2(2s^2 + s) + 1$

$\Rightarrow z^2$ ungerade

Bemerkung: Ähnlich zeigt man, dass $\sqrt{m} \in \mathbb{Q}$ genau dann gilt, wenn m eine Quadratzahl ist.

$\mathbb{Q}$ besitzt also Lücken.
Man beschreibt diese Lücken, indem man **Intervallschachtelungen** konstruiert, d.h. Folgen von Intervallen

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ [a_3, b_3],\ \ldots, \qquad a_n, b_n \in \mathbb{Q},$$

die ineinander geschachtelt sind

$= b_3 - a_3$

$[a_1,b_1] \cap [a_2,b_2] \cap [a_3,b_3]$
$= [a_3,b_3]$

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots$$

und deren Länge $\boxed{b_n - a_n}$ für $n \to \infty$ gegen Null strebt.

Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ zeichnet nun gerade aus, dass es für jede Intervallschachtelung eine reelle Zahl x gibt, die im Durchschnitt aller Intervalle liegt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

Auf diese Weise „schließt“ man die Lücken in $\mathbb{Q}$ und man nennt diese Eigenschaft die **Vollständigkeit** von $\mathbb{R}$.

Die **Dezimalbruchentwicklung** nutzt gerade diese Möglichkeit, reelle Zahlen durch eine Intervallschachtelung zu beschreiben:

Während ein *abbrechender Dezimalbruch*:

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n := a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + a_n \cdot 10^{-n} = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k},$$

mit $a_0 \in \mathbb{Z},\ a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

eine endlich Summe ist und stets eine rationale Zahl beschreibt, gibt es auch *unendliche Dezimalbrüche*

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots := a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + \ldots = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}}_{?}.$$

Damit meint man, dass z.B.

$$\pi = 3,141592659\ldots$$

durch die Intervallschachtelung beschrieben wird, die durch Abbrechen nach n Stellen entsteht, also

n	
0	$\pi \in [3; 4]$
1	$\pi \in [3,1; 3,2]$
2	$\pi \in [3,14; 3,15]$
$\vdots$	$\vdots$
7	$\pi \in [3,1415926; 3,1415927]$
$\vdots$	$\vdots$

Im Folgenden soll nun geklärt werden, was die mathematisch präzise Bedeutung einer unendlichen Summe, z.B. der unendlichen Dezimalbruchentwicklung $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$, ist und wie man irrationale Zahlen wie etwa $\sqrt{2}$ (effizient) näherungsweise bestimmen kann.

die ineinander geschachtelt sind

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

und deren Länge $b_n - a_n$ für $n \to \infty$ gegen Null strebt.
Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ zeichnet nun gerade aus, dass es für jede Intervallschachtelung eine reelle Zahl x gibt, die im Durchschnitt aller Intervalle liegt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

Auf diese Weise „schließt“ man die Lücken in $\mathbb{Q}$ und man nennt diese Eigenschaft die **Vollständigkeit** von $\mathbb{R}$.
Die **Dezimalbruchentwicklung** nutzt gerade diese Möglichkeit, reelle Zahlen durch eine Intervallschachtelung zu beschreiben:
Während ein *abbrechender Dezimalbruch*:

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n := a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \dots + a_n \cdot 10^{-n} = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k},$$

$n = 2$ $\quad 3,14 = 3 + 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,01$

mit $a_0 \in \mathbb{Z}, \; a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

endliche Summe

eine endlich Summe ist und stets eine rationale Zahl beschreibt, gibt es auch *unendliche Dezimalbrüche*

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots := a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + \dots = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}}_{?}.$$

„Symbol“

Damit meint man, dass z.B.

$$\pi = 3,141592659\dots$$

durch die Intervallschachtelung beschrieben wird, die durch Abbrechen nach n Stellen entsteht, also

n	
0	$\pi \in [3; 4]$
1	$\pi \in [3,1; 3,2]$
2	$\pi \in [3,14; 3,15]$
$\vdots$	$\vdots$
7	$\pi \in [3,1415926; 3,1415927]$
$\vdots$	$\vdots$

geschachtelte Intervalle

Im Folgenden soll nun geklärt werden, was die mathematisch präzise Bedeutung einer unendlichen Summe, z.B. der unendlichen Dezimalbruchentwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$, ist und wie man irrationale Zahlen wie etwa $\sqrt{2}$ (effizient) näherungsweise bestimmen kann.

6.1 Konvergenz von Folgen und Reihen

Motivation II: Wir haben gesehen, dass der effektive Jahreszins bei unterjähriger Verzinsung mit $\frac{p}{m}\%$ mehr erwirtschaftet als die jährliche Verzinsung mit $p\%$. Für $p = 0.05$ (also 5% Zinsen) lautet die Formel für das Kapital

$$K(m) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{0.05}{m}\right)^m$$

wobei zum Beispiel mit $m = 12$ monatlich und $m = 365$ tägliche Verzinsung gemeint ist.

Frage: Wie groß wird $K(m)$ wenn wir m sehr groß werden lassen?

Antwort:

$$K(m) \xrightarrow[\text{groß}]{m \text{ sehr, sehr}} e^{0{,}05} \cdot K_0$$

Definition 6.1.1. Eine Folge reeller Zahlen ist eine Funktion

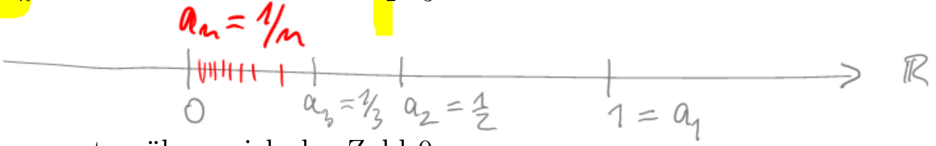
$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a(n) := a_n,$$

die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet. Die Zahl a_n heißt das n-te Glied der Folge, die Folge insgesamt wird mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. kurz mit (a_n) oder auch a_n bezeichnet.

Beispiele 6.1.2.

(i) $a_n = n^2$, Folge der Quadratzahlen: 1, 4 ,9, 16, ... $a_1 = 1^2 = 1,\ a_2 = 2^2 = 4, \ldots$

(ii) $a_n = \frac{1}{n}$, "harmonische" Folge: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ...



Die Folgenwerte nähern sich der Zahl 0 an.

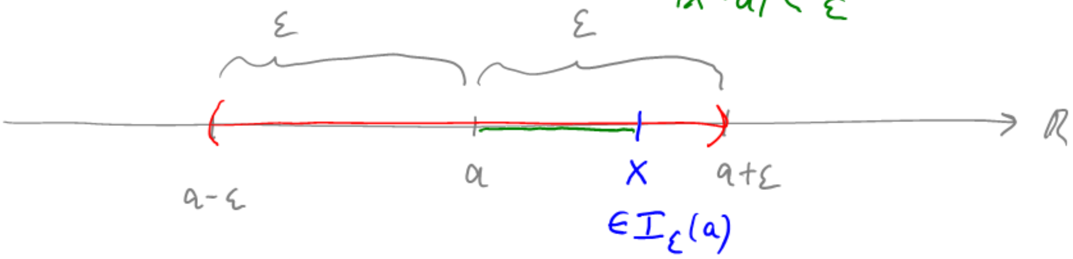
Dieses Bild wird präzisiert in der Definition der Konvergenz einer Folge:

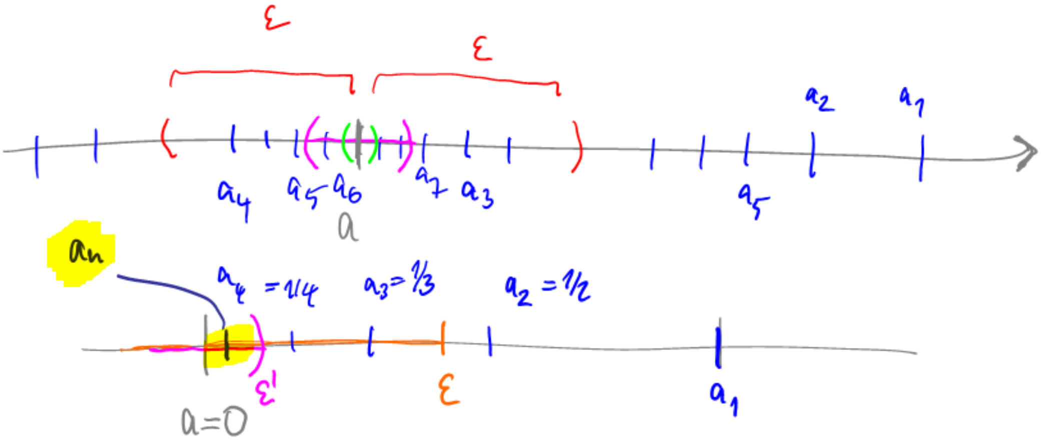
Definition 6.1.3. Zu einem $\varepsilon > 0$ definiert man die *ε-Umgebung von a* $\in \mathbb{R}$ als das Intervall

$$I_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

Einschub 6.1.4. ...

$|x - a| < \varepsilon$





Die Folge a_n *konvergiert* für $n \to \infty$ gegen einen *Grenzwert* $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen **alle, bis auf endlich viele** Folgenglieder a_n in der ε-Umgebung $I_\varepsilon(a)$ von a.
Eine Folge a_n heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, das Grenzwert der Folge ist. Andernfalls heißt die Folge **divergent**.

Mit anderen Worten: Egal wie klein ε gewählt wird, ab einer gewissen Nummer liegen alle Folgenglieder in der ε-Umgebung von a.
In diesem Fall schreiben wir kurz:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \text{ für } n \to +\infty.$$

Man spricht: a_n geht/strebt gegen a für n gegen unendlich.

Beispiele 6.1.5.

- Die konstante Folge $(a, a, a, a, \ldots)$ konvergiert gegen a. $a_1 = a,\ a_2 = a, \ldots$

  Einschub 6.1.6. ... Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

  $$a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = I_\varepsilon(a), \text{ also } \lim_{n \to \infty} a_n = a \qquad \square$$

- *Harmonische Folge:* Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen $a = 0$:

  Einschub 6.1.7. ... Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ gilt: $a_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$ also $a_n \in I_\varepsilon(0)$ $\square$

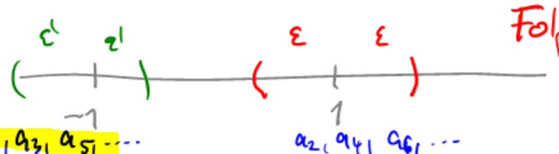
- *Geometrische Folge:* Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Dann gilt $\lim_{n \to +\infty} x^n = 0$. zB $x = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

  Einschub 6.1.8. ... Beweis: Für $x = 0$ stimmt das. ✓
  Sei $x \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann: $|x| < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{|x|} = 1 + q$ mit $q > 0$ $\Rightarrow \frac{1}{|x^n|} = \frac{1}{|x|^n} = (1+q)^n$
  Bernoullische Ungleichung
  $\geq 1 + nq \Rightarrow |x^n| < \frac{1}{1+nq}$

  $\Rightarrow |x^n| < \frac{1}{1+n\underset{>0}{q}} < \varepsilon$ für genügend große $n \in \mathbb{N}$ $\square$

- Die *alternierende* Folge $a_n = (-1)^n$, also $(a_n) = (-1, 1, -1, \ldots)$ ist nicht konvergent.

  Einschub 6.1.9. ... a_n nicht konvergent gegen 1, denn alle ungeraden Folgenglieder sind außerhalb $I_\varepsilon(a)$ $(\varepsilon > 0)$

  Also insgesamt a_n ~~nicht~~ divergent

6.1.1 Grenzwertsätze

Man kann mit „$\lim_{n\to\infty}\cdots$“ auch „rechnen“, aber nur falls es sich um konvergente Folgen handelt.

Satz 6.1.10 (Grenzwertsätze). *Es seien a_n, b_n reelle Zahlenfolgen. Weiterhin seien a_n und b_n konvergent mit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. Dann gilt:*

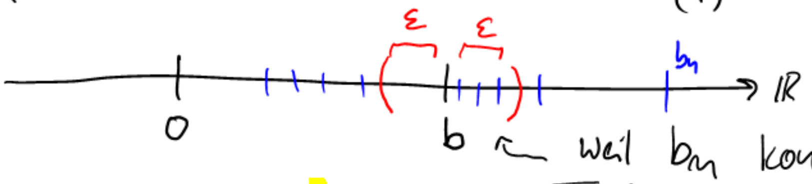
(i) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(iii) Ist $b \neq 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ konvergiert und es gilt: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

zu i) $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[(i)]{n\to\infty} 0+0 = 0$

zu iii)



← weil b_n konvergent liegen in $I_\varepsilon(b)$ unendlich viele a_n's

also $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$

Beispiele 6.1.11.

1) $a_n = n$, $b_n = 1/n$, $a_n \cdot b_n = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$

2) $a_n = n^2$, $b_n = 1/n$, $a_n \cdot b_n = n$ nicht konvergent

3) $a_n = 2n$, $b_n = 1/n$, $a_n \cdot b_n = 2 \to 2$

Beispiele 6.1.12. Sei $a_n = \frac{n^2+4n}{2n^2+1}$.

$$a_n = \frac{n^2+4n}{2n^2+1} \underset{\text{TRICK}}{=} \frac{n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+4/n}{2+1/n^2}$$

Es gelten: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{4}_{=a_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n} \overset{GWS(ii)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} 4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 4\cdot 0 = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} \overset{GWS(ii)}{=} 0\cdot 0$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} 1+4/n \overset{GWS(i)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n} \overset{1)}{=} 1+0 = 1$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n^2} \overset{GWS(i)}{\underset{2)}{=}} 2+0 = 2$

Definition 6.1.13 (beschränkt). Sei a_n ein Folge. Wir nennen a_n *beschränkt* wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ (sogenannte Schranke) gibt, so dass

$$|a_n| \leq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

gilt.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4/n}{2+1/n^2} \overset{GWS(iii)}{\underset{3)4)}{=}} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1+4/n}{\lim 2+1/n^2} \underset{3)4)}{=} \frac{1}{2}$

$n \to \infty$

Def. 6.1.13

Beispiele 6.1.14.

(i) $a_n = \frac{1}{n}$ ist beschränkt durch $K = 1$, denn

Einschub 6.1.15. ...

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| = |\frac{1}{n}| \leq 1 = K$

(ii) $b_n = n$ ist **nicht** beschränkt.

Einschub 6.1.16. ... b_n nicht beschränkt $:\Longleftrightarrow$ Zu jedem $K \in \mathbb{R}, K>0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $|b_{n_0}| > K$.

zu $b_n := n$. ~~Sei $K>0$~~. Wähle $n_0 := \lceil K+1 \rceil$ aufrunden auf nächst-größere natürliche Zahl

Dann gilt: $b_{n_0} = n_0 = \lceil K+1 \rceil > K$ $\square$

(iii) $c_n = (-1)^n$ ist beschränkt, denn

$$|c_n| = |(-1)^n| = 1 =: K$$

$=: K$

(iv) $d_n = \sin(n)$ ist beschränkt, denn wir haben bereits gesehen, dass $|\sin(n)| \leq 1$ gilt, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 6.1.17 (Nullfolge · beschränkt = Nullfolge)**.** *Sei a_n ein beschränkte Folge und b_n eine Nullfolge (d.h. eine konvergente Folge mit Grenzwert 0). Dann ist die Folge $a_n \cdot b_n$ eine Nullfolge.*

Beweis:

Einschub 6.1.18. ...

Beispiele 6.1.14.

(i) $a_n = \frac{1}{n}$ ist beschränkt durch $K = 1$, denn

Einschub 6.1.15. ...

(ii) $b_n = n$ ist **nicht** beschränkt.

Einschub 6.1.16. ...

(iii) $c_n = (-1)^n$ ist beschränkt, denn

$$|c_n| = |(-1)^n| = 1$$

(iv) $d_n = \sin(n)$ ist beschränkt, denn wir haben bereits gesehen, dass $|\sin(n)| \leq 1$ gilt, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 6.1.17 (Nullfolge · beschränkt = Nullfolge)**.** *Sei a_n ein beschränkte Folge und b_n eine Nullfolge (d.h. eine konvergente Folge mit Grenzwert 0). Dann ist die Folge $a_n \cdot b_n$ eine Nullfolge.*

Beweis:

Einschub 6.1.18. ... zu zeigen ist: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

Vor 1 a_n beschränkt, d.h.: es gibt $K>0$, so dass $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Vor 2 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, d.h. zu jedem $\varepsilon' > 0$ gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq N'$ gilt: $|b_n - 0| < \varepsilon'$.

zu zeigen zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n \cdot b_n - 0| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{K}$. Sei $N := N'$. (N' zu ε' aus Vor 2)

Dann gilt: $|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \overset{\text{(Vor1)}}{\leq} K \cdot |b_n| \overset{\text{(Vor2)}}{\leq} K \cdot \varepsilon' = (*)$

(für $n \overset{\text{Vor2}}{\geq} N' = N$) $\quad (*) = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \quad \square$

Beispiele 6.1.19. Die Folge

$$c_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

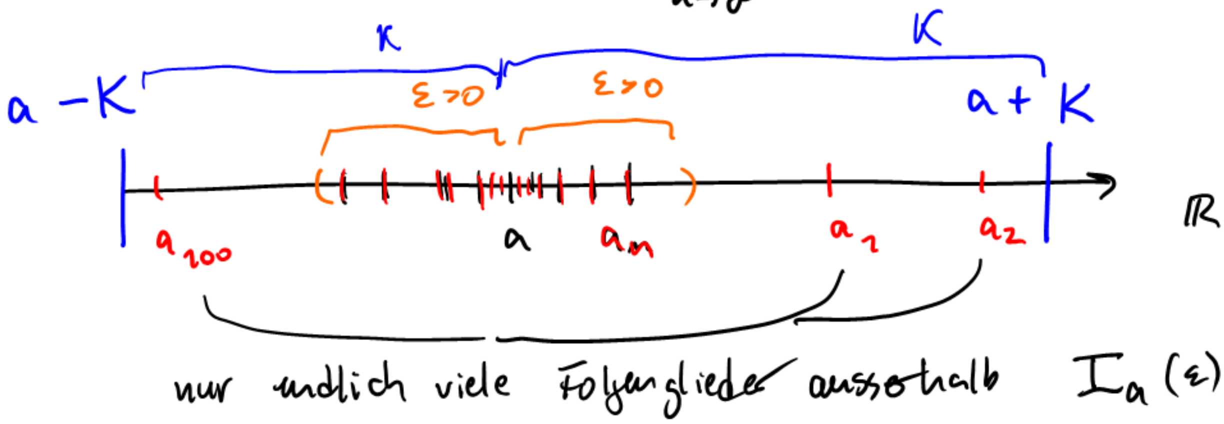
konvergiert gegen 0, denn

$$c_n = \frac{\sin(n)}{n} = \underbrace{\sin(n)}_{=a_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{=b_n}$$

Wegen $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ ist $\sin(n)$ beschränkt, $\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge, daher folgt nach Satz 6.1.17, dass c_n eine Nullfolge ist.

Satz 6.1.20 (Jede konvergente Folge ist beschränkt)**.** *Sei a_n ein konvergente Folge. Dann ist die Folge a_n beschränkt.*

Einschub 6.1.21. ... Idee es gelte: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$



Beweis: Sei a_n ein konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$. Nehmen wir $\varepsilon = 1$. Dann wissen wir (wegen Konvergenz), dass ein $N \in \mathbb{N}$ eixstiert mit

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| \leq 1.$$

Wir setzen

$$K := \max(|a_1 - a|, |a_2 - a|, |a_3 - a|, ..., |a_N - a|, 1)$$

dann gilt

$$|a_n - a| \leq K \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit folgt, dass

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq K} + |a| \leq K + |a|$$

Somit ist die Folge a_n beschränkt durch $K + |a|$. □

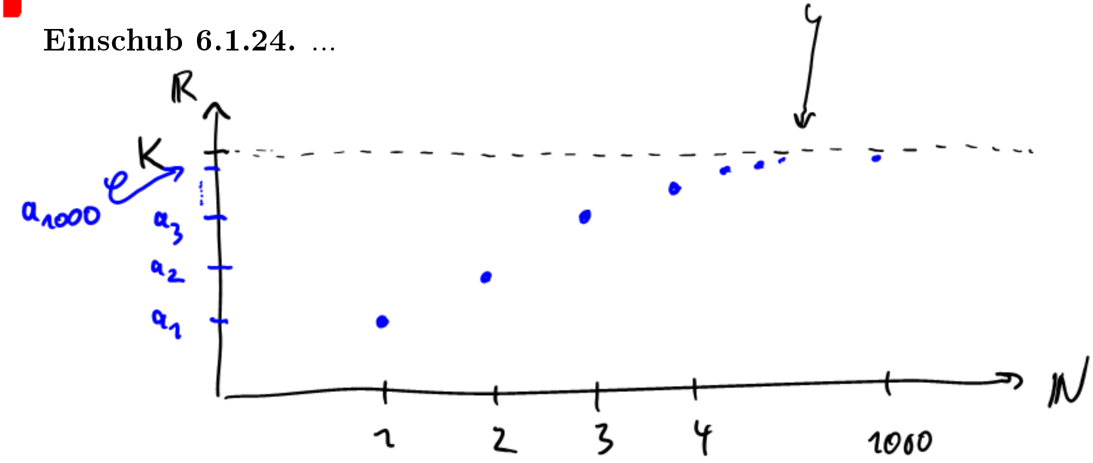
Beispiele 6.1.22. Die Folge $a_n = \frac{n^2+4n}{2n^2+1}$ aus Beispiel 6.1.12 ist konvergent und somit beschränkt.

z.B: Wurzeln

Grenzwerte von Folgen sind oft interessant, da dadurch neue Objekte (wie irrationale Zahlen) beschrieben werden können. Dabei spielt die Vollständigkeit der reellen Zahlen eine entscheidende Rolle. Ein wichtiger Satz in diesem Zusammenhang ist:

Satz 6.1.23 (Monotoniekriterium). *Monotone und beschränkte Folgen sind konvergent.*

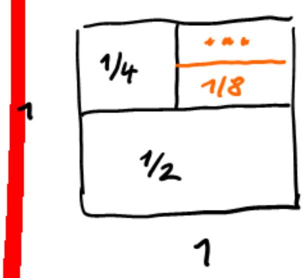
Einschub 6.1.24. ...



6.2 Reihen

Summen mit unendlich vielen Summanden gibt es nicht, aber man kann Grenzwerte von Summen mit endlich vielen Summanden betrachten.

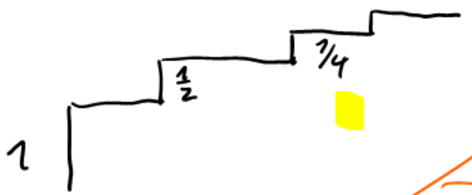
Einschub 6.2.1. ... Beispiel 1) Quadrat



also: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \overbrace{\underline{\cdots}}^{??} = 1$

ab hier immer wieder halbieren und summieren $\hat{=}$ unendlich viele Summanden

2) Treppe



$\underbrace{1}_{a_1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_2} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_3} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{!?}{=}$

Definition 6.2.2. Sei a_n eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$s_3 := a_1 + a_2 + a_3$
$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

die *n-te Partialsumme* der **Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Die Reihe heißt konvergent, wenn die Folge s_n der Partialsummen konvergiert und man schreibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Satz 6.2.3 (Geometrische Reihe). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt für alle $x \neq 1$:*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

geometrische Summe

und damit im Limes für $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

"n→∞"

Im obigen Bsp (Treppe)

$x = \frac{1}{2}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Beweis
Die Summenformel beweist man formal mit vollständiger Induktion oder intuitiver mit der folgenden Rechnung:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) \cdot (1-x) = (1+x+x^2+\ldots+x^n)(1-x) = (1+x+\ldots+x^n) - (x+x^2+\ldots+x^n+x^{n+1}) = 1-x^{n+1}.$$

$=0$ $=0$

Ist $|x| < 1$, so konvergiert x^n gegen 0 (geometrische Folge) und somit folgt aus der Summenformel mit den Grenzwertsätzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \underset{\text{Dfn.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \underset{\text{geom. Summe}}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$ geometrische Folge

□

6.3 Anwendungen

6.3.1 Unendliche Dezimalbrüche

Betrachte den unendlichen Dezimalbruch

$$a_0, a_1a_2a_3\ldots = a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k},$$

wobei $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Dann ist die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k}$$

offensichtlich monoton wachsend, denn

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k} \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k} + \underbrace{a_{n+1} 10^{-(n+1)}}_{\geq 0} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k 10^{-k} = s_{n+1}$$

und ferner nach oben beschränkt, denn:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 10^{-k} \leq a_0 + \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = a_0 + 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n}\right)$$

$$= a_0 + \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 10^{-k} \qquad \left(\tfrac{1}{10} \text{ ausklammern}\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} s_n = a_0 + \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \overset{\text{gR}}{=} a_0 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = a_0 + 1 < \infty$$

Somit ist die Partialsummenfolge eines unendlichen Dezimalbruchs nach dem Monotoniekriterium konvergent und der unendliche Dezimalbruch als Limes dieser Folge wohldefiniert.

Wir betrachten nun $9{,}\overline{9}$. Dieser unendliche Dezimalbruch ist definiert als

$$9{,}\overline{9} = 9 + 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k}$$

Nach der obigen Formel ist dies

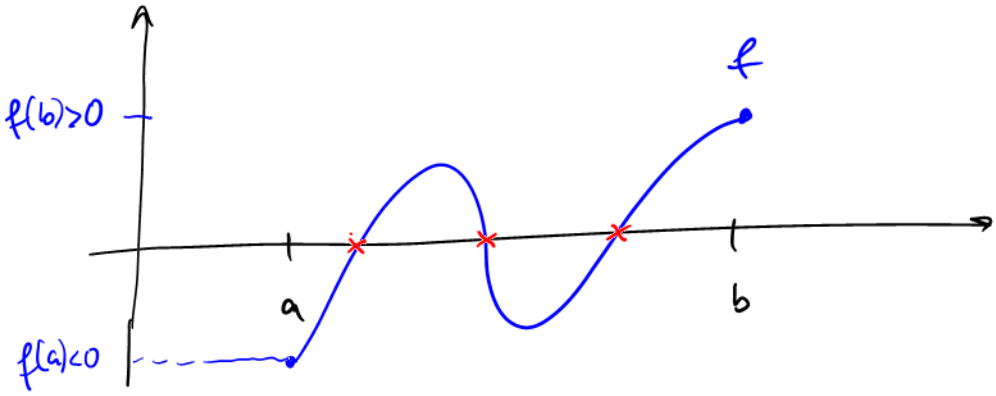
$$= 9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = 9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \overset{\text{gR}}{=} 9 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{\frac{9}{10}} = 10$$

Somit ist $9{,}\overline{9} = 10$.

6.3.2 Approximative Bestimmung von Nullstellen

Gegeben sei eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die *stetig* ist, d.h. für die aus $x_n \to x$ stets $f(x_n) \to f(x)$ folgt[1].

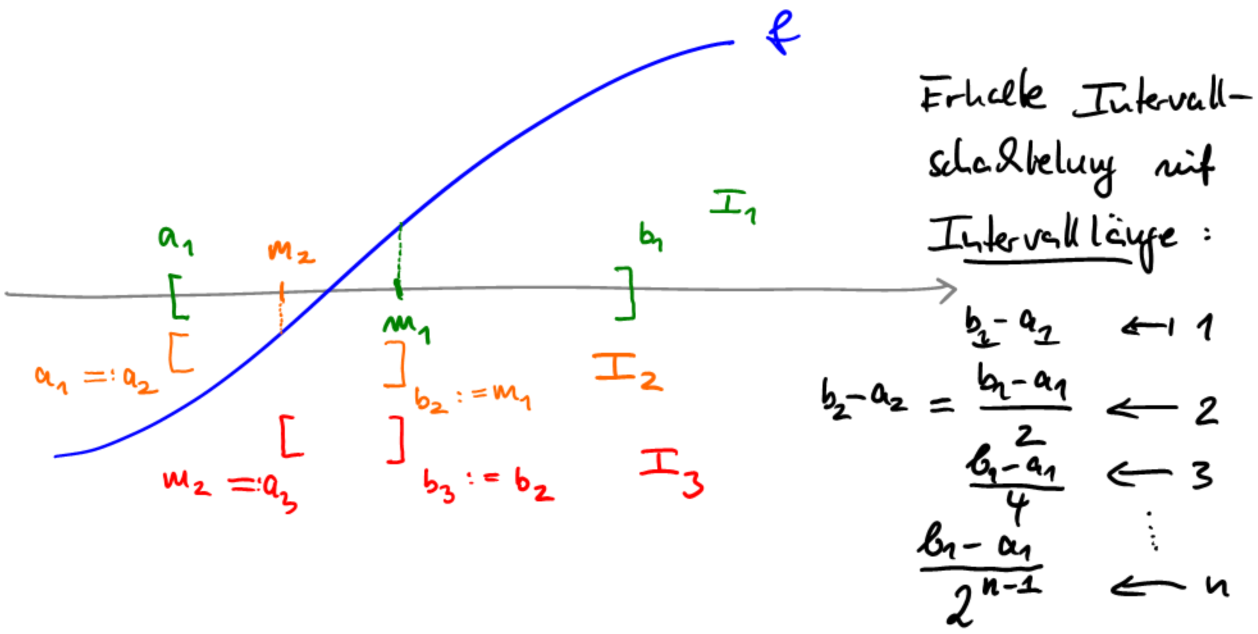
Einschub 6.3.1. ...



Es ist anschaulich klar, dass eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ in dem Intervall (a,b) mindestens eine Nullstelle x_0 haben muss (*Zwischenwerteigenschaft stetiger Funktionen*)[2]. Diese Nullstellen kann man mitunter nicht explizit ausrechnen, aber durch verschiedene numerische Verfahren approximieren:

(i) *Intervallhalbierungsmethode:* Hierbei wird eine Intervallschachtelung $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konstruiert, die die Nullstelle einschließt:

Einschub 6.3.2. ...



Setze $I_1 = [a,b]$ und bestimme $I_k = [a_k, b_k]$ für $k = 2, 3, \ldots$, so, dass mit Intervallmittelpunkt $m_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ von I_k gilt:

$$I_{k+1} = \begin{cases} [a_k, m_k], & \text{falls } f(m_k) \geq 0 \\ [m_k, b_k], & \text{falls } f(m_k) < 0. \end{cases}$$

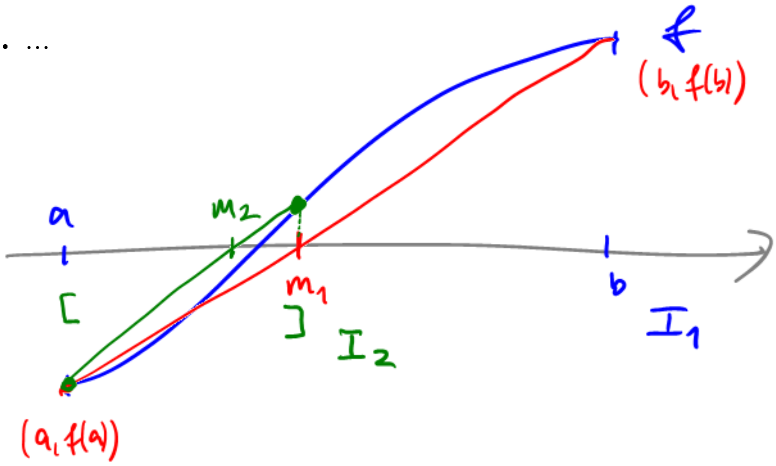
Da die Intervalllänge sich in jedem Schritt halbiert, liegt eine Intervallschachtelung vor. Für die reelle Zahl x_0, die in allen I_k enthalten ist, muss dann $f(x_0) = 0$ gelten Die Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen die gesuchte Nullstelle.

[1] Anschaulich bedeutet die Stetigkeit von f auf dem Intervall $[a;b]$, dass man den Graphen von f, ohne den Stift abzusetzen, durchzeichnen kann.

[2] Analog geht es für $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$.

(ii) *Regula falsi:* Bestimme eine Intervallschachtelung $I_k = [a_k, b_k]$ für $k = 1, 2, ...$, wie bei der Intervallhalbierungsmethode mit $I_1 = [a, b]$, wähle aber den Unterteilungspunkt m_k nicht als Mittelpunkt des Intervalls I_k, sondern als Nullstelle der Gerade durch die Punkte $P(a_k; f(a_k))$ und $Q(b_k; f(b_k))$:

Einschub 6.3.3. ...



Gemäß der Zwei-Punkte-Form besitzt diese Gerade die Gleichung

$$y = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \cdot (x - a_k) + f(a_k)$$

und damit die Nullstelle

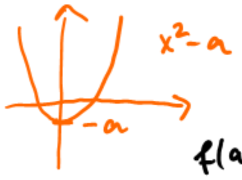
$$m_k = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \cdot f(a_k).$$

6.3.3 Approximation von $\sqrt{a}$

Die Quadratwurzel aus $a > 0$ lässt sich daher z.B. approximieren, indem man mit den Methoden aus 6.3.2. die Lösung der Gleichung

$$x^2 - a = 0 \qquad f(x) = x^2 - a$$

approximativ bestimmt. Verwendet man die Intervallhalbierungsmethode, so bedeutet dies, dass man die $I_k = [a_k, b_k]$ für $k = 1, 2, ...$, so bestimmt, dass mit Intervallmittelpunkt $m_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ von I_k gilt:



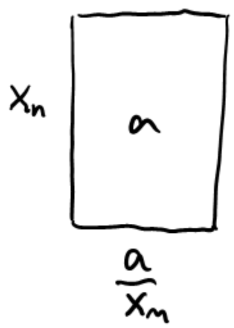
$$a_1^2 \leq a \leq b_1^2 \quad \text{und} \quad I_{k+1} = \begin{cases} [a_k, m_k], & \text{falls } m_k^2 \geq a \iff f(m_k) \geq 0 \\ [m_k, b_k], & \text{falls } m_k^2 < a. \iff f(m_k) < 0 \end{cases}$$

$f(a_1) \leq 0 \leq f(b_1)$

Alternativ kann man eine Intervallschachtelung zur Approximation von $\sqrt{a}$ konstruieren, indem man in jedem Schritt die nächste Nachkommastelle in der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{a}$ bestimmt. Beide Verfahren sind eher langsam, da sich bei jedem Schritt die Zahl der gültigen Stellen um höchstens Eins verbessert (*lineare Konvergenz*).

Numerisch effizienter ist die Approximation mit Hilfe des *Heron-Verfahrens*:

Einschub 6.3.4. ... Heron-Verfahren geometrisch: Rechteck mit Fläche $a > 0$:

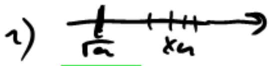


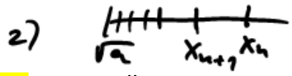
$$\left.\begin{array}{l} x_n > \sqrt{a} \\ \frac{a}{x_n} < \sqrt{a} \end{array}\right\} \quad \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} =: x_{n+1}$$

Mittelwert der Seitenlängen nehmen

Die *Heron-Folge* x_n zur Approximation von $\sqrt{a}, a > 0$ mit Startwert $x_0 > 0$ ist rekursiv definiert durch:

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$





Die Folge x_n ist nach unten durch $\sqrt{a}$ beschränkt und monoton fallend (siehe Übungen). Daher konvergiert die Folge x_n nach dem Monotoniekriterium.

Sei x der Grenzwert von x_n, dann folgt aus der rekursiven Definition mithilfe der Grenzwertsätze, dass für x gilt:

GWS wegen Konvergenz

Monotoniekrit

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n\to+\infty} x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

D.h. x erfüllt die quadratische Gleichung

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + a\right) \Leftrightarrow x^2 = a.$$

Methode klappt gut bei rekursiv definierten Folgen

Da $x > 0$ ist, folgt also $\lim_{n\to+\infty} x_n = x = \sqrt{a}$.

Bemerkung 6.3.5 (Einschub 6.3.4)**.** *Geometrisch* kann man $\sqrt{a}$ als Seitenlänge eines Quadrats mit Flächeninhalt a interpretieren. Betrachtet man ein Rechteck mit Flächeninhalt a mit einer Seite der Länge x_0, so hat die andere Seite die Länge $\frac{a}{x_0}$. Das arithmetische Mittel $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$ dieser beiden Seitenlängen liegt zwischen den beiden Seitenlängen, d.h. ein Rechteck mit Flächeninhalt a und Seitenlänge x_1 besitzt Seitenlängen, die einen kleineren Unterschied aufweisen als das Ausgangsrechteck. Iteriert man diesen Prozess, so nähern sich die Rechtecke einem Quadrat an, d.h. die Folge x_n der Seitenlängen, d.h. die Heron-Folge, konvergiert gegen $\sqrt{a}$.

Kapitel 7

Stochastik

Die Stochastik umfasst die Teilgebiete

Wahrscheinlichkeitstheorie und *Statistik*.

Die Statistik unterteilt sich in *deskriptive* und *schließende* Statistik. In der deskriptiven Statistik geht es um die Aufbereitung von Daten, in der schließenden um Aussagen über die Grundgesamtheit mithilfe von Daten, die dieser Grundgesamtheit in geeigneter Weise entnommen werden.

7.1 Deskriptive Statistik

7.1.1 Grundbegriffe der deskriptiven Statistik

Bei statistischen Untersuchungen (*Erhebungen*) werden an geeignet ausgewählten

Untersuchungseinheiten (Beobachtungseinheiten, Merkmalsträgern, Versuchseinheiten)

jeweils die Werte eines oder mehrerer *Merkmale* festgestellt.

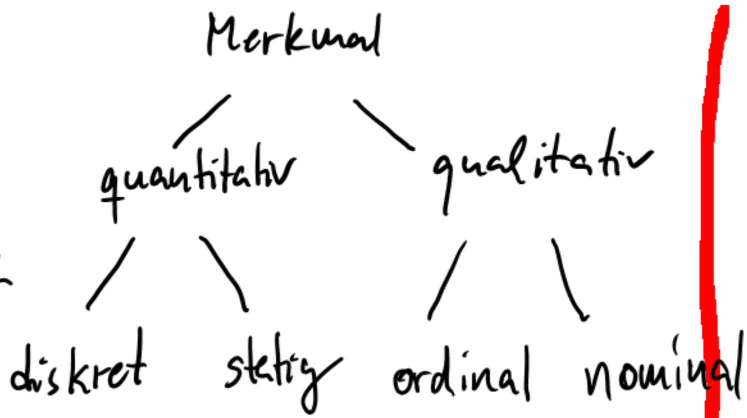
Die Werte, die ein Merkmal annehmen kann, heißen *Merkmalsausprägungen*.

Bei Merkmalen unterscheidet man:

- in natürlicher Weise zahlenmäßig erfassbare Merkmale, sogenannte *quantitative Merkmale* und
- artmäßig erfassbare, sogenannte *qualitative Merkmale*.

Sind bei einem quantitativen Merkmal die Ausprägung isolierte Zahlenwerte, so heißt das Merkmal *diskret*, können die Ausprägungen grundsätzlich jeden Wert eines Intervalls annehmen, so spricht man von *stetigen* Merkmalen.

Qualitative Merkmale unterscheidet man in solche, deren Ausprägungen eine natürliche Reihenfolge aufweisen (*ordinale Merkmale (Rangmerkmale)*, und solche, die nach rein qualitativen Gesichtspunkten klassifiziert werden (*nominale Merkmale*).



Beispiele für Merkmale:

- Familienstand: nominal
- Gewicht einer Kokosnuss: stetig
- Anzahl Haustiere in einem Haushalt: diskret
- Note in einer Bachelorarbeit: ordinal

Die Menge der Untersuchungseinheiten, über die hinsichtlich eines oder mehrerer Merkmale Aussagen getroffen werden sollen, heißt *Grundgesamtheit (oder Population)*.

Eine zufällig entnommene endliche Teilmenge der Grundgesamtheit nennt man *Stichprobe*. Erhebt man bei n Untersuchungseinheiten der Grundgesamtheit, ein oder mehrere Merkmale, so *zieht man eine Stichprobe vom Umfang n.*

Diese Stichprobe notiert man in der Reihenfolge ihrer Erhebung als *Urliste* $x_1, ..., x_n$.

Beispiel: Bei einem Leistungsstand mit ~~10~~ 11 teilnehmenden Schülern erhielt man das ~~Testergebnis~~ Noten in Form folgender Urliste:

1, 2, 1, 3, 2, 4, 5, 5, 1, 6, 3

~~58, 53, 42, 58, 48, 53 ,12, 56, 69, 29~~

$n = 11$

$x_{11} = 3$

Man versucht nun diese Daten der Urliste in einer übersichtlicheren Weise darzustellen. Dies kann durch *Graphiken* oder durch *statistische Maßzahlen* geschehen:

Einschub 7.1.1. ...

a_i	1	2	3	4	5	6	
$H_{11}(a_i)$	3	2	2	1	2	1	$\to \Sigma = 11$
$h_{11}(a_i)$	$3/11$	$2/11$	$2/11$	$1/11$	$2/11$	$1/11$	$\to \Sigma = 1$

Sei X ein Merkmal, das genau s mögliche verschiedene Ausprägungen $a_1, ..., a_s$ besitzt. Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, ..., x_n$ des Merkmals X vom Umfang n. Dann heißt

$$H_n(a_i) := \left| \underbrace{\{j \in \{1, ..., n\} \mid x_j = a_i\}} \right| =: \text{Anzahl}$$

absolute Häufigkeit der Ausprägung a_i in der Stichprobe $x_1, ..., x_n$.
Die Abbildung

$$H_n : \{a_1, ..., a_s\} \to \{0, ..., n\}, a_i \mapsto H_n(a_i)$$

heißt *absolute empirische Häufigkeitsverteilung der Stichprobe $x_1, ..., x_n$.*
Es gilt:

$$H_n(a_1) + ... + H_n(a_s) = n.$$

Der Quotient

$$h_n(a_i) := \frac{H_n(a_i)}{n} \qquad (i \in \{1, ..., s\})$$

heißt *relative Häufigkeit der Ausprägung a_i in der Stichprobe $x_1, ..., x_n$* und entsprechend die Abbildung

$$h_n : \{a_1, ..., a_s\} \to [0, 1], a_i \mapsto h_n(a_i), \qquad (i \in \{1, ..., s\})$$

relative empirische Häufigkeitsverteilung der Stichprobe $x_1, ..., x_n$. Hier gilt:

$$h_n(a_1) + ... + h_n(a_s) = 1.$$

7.2 Graphische Darstellungen von Daten

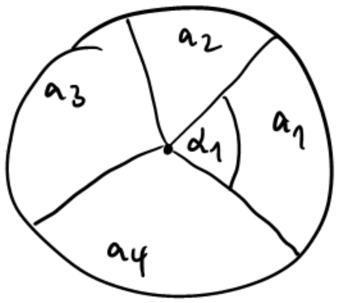
erfolgen je nach Situation unter anderem als Stabdiagramm, Kreisdiagramm oder Histogramm.

7.2.1 Kreis- und Stabdiagramm

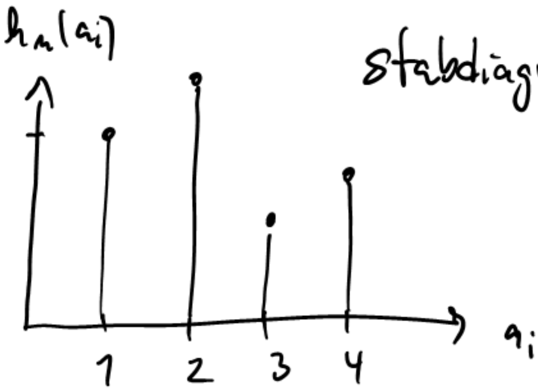
Bei den erstgenannten Darstellungen werden Stäbe bzw. Kreissektoren in einer Größe proportional zu der relativen Häufigkeit der verschiedenen Ausprägungen gezeichnet.

Einschub 7.2.1. ...

$\alpha_1 := 360° \cdot h_n(a_1)$



Kreisdiagramm



Stabdiagramm

7.2.2 Histogramm

Zur Erstellung eines Histogramms wird der Wertebereich der Merkmalsausprägung (eine Teilmenge der reellen Zahlen) in sich nicht-überlappende, halboffene Intervalle $K_1, ..., K_s$ zerlegt, d.h. man wählt reelle Zahlen $k_1 < k_2 < ... < k_{s+1}$ mit

$$K_j = [k_j, k_{j+1}) := \{x \in \mathbb{R} | k_j \leq x < k_{j+1}\}, \quad 1 \leq j \leq s,$$

die alle Stichprobenwerte $x_1, ..., x_n$ enthalten.

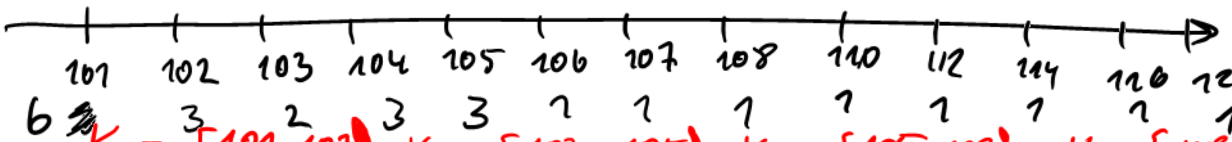
Zum Beispiel für eine Stichprobe $x_1, \cdots, x_{25}$

min = 101

max = 120

n = 25

$$112, 102, 106, 102, 110, 105, 104, \boxed{101}, 104, 108, 107, 101, 101, 101,$$
$$105, 103, 104, 114, 105, 101, 101, 103, 116, 102, \boxed{120}$$



$K_1 = [101, 103)$, $K_2 = [103, 105)$, $K_3 = [105, 108)$, $K_4 = [108, 114)$, $K_5 = [114, 120]$

Ein Histogramm zu der Klasseneinteilung $K_1, ..., K_s$ ist eine graphische Darstellung der Stichprobe, die wir erhalten, indem wir über jeder Klasse $K_1, ..., K_s$ ein Rechteck errichten, dessen Fläche proportional zu der *empirischen relativen Klassenhäufigkeit*

$$h(K_1), ..., h(K_s)$$

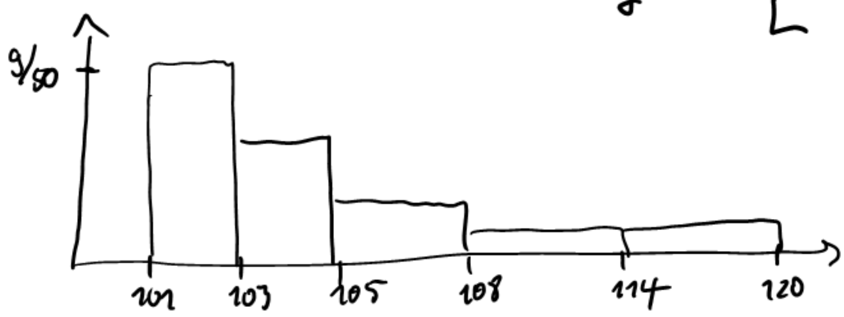
$h(K_1) = 9/25$

ist, wobei $h(K_j)$ den Anteil der Stichprobenwerte, die in K_j liegen $(1 \leq j \leq s)$ bezeichnet. Daher ist die Höhe d_j des Rechtecks über K_j gegeben durch die Gleichung

$$d_j \cdot \text{ Länge des Intervalls } K_j = d_j \cdot \overbrace{(k_{j+1} - k_j)}^{=L} = h(K_j).$$

$\Rightarrow d_j = \dfrac{h(K_j)}{L}$

i	1	2	3	4	5
$h(K_i)$	9/25	5/25	5/25	3/25	3/25
d_i	9/50	5/50	5/75	3/150	3/150
	= 0,18	= 0,1	= 0,07	= 0,02	= 0,02



Die Wahl der Anzahl der Klassen und der Klassenbreite ist ein wenig willkürlich und sollte sich an dem Ziel, eine aussagekräftige Graphik zu erhalten, orientieren.

Faustregel 1) Anzahl Klassen $\approx \sqrt{n}$

2) keine leeren Klassen

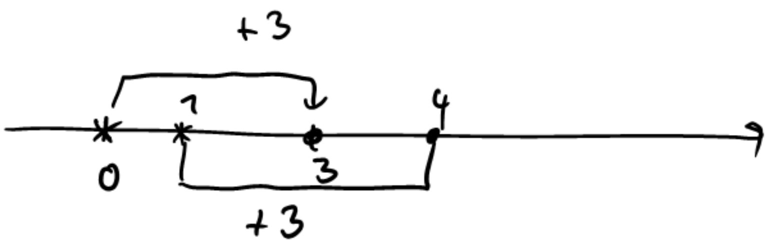
7.3 Lagemaße

Sei $x_1, ...x_n$ eine Stichprobe eines quantitativen Merkmals X.
Eine Funktion

$$\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, ...x_n) \mapsto \ell(x_1, ...x_n)$$

heißt *Lagemaß* , wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\ell(x_1 + a, ..., x_n + a) = \ell(x_1, ...x_n) + a.$$



$a = 3$

7.3.1 Arithmetisches Mittel

Das *arithmetische Mittel* $\overline{x}$ der Stichprobe $x_1, ...x_n$ ist definiert durch

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

und ist ein Lagemaß.
Das *geometrische Mittel*

$$\overline{x}_g := \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n}, \qquad x_1, ..., x_n > 0$$

und das *harmonische Mittel*

$$\overline{x}_h := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}}, \qquad x_1, ..., x_n > 0$$

hingegen nicht.
Das geometrische Mittel wird dort verwendet wo Werte multiplikativ wachsen oder wo man ~~Verhältnisse, Raten oder~~ Prozentänderungen mittelt.

Einschub 7.3.1. ... Produkt kostet 100

$100 \xrightarrow[1J]{+50\%} 150 \xrightarrow[2J]{-50\%} 75$

AM : $\frac{1}{2}(50 + (-50)) = 0$

GM : $\sqrt[2]{1{,}5 \cdot 0{,}5} = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}866$

$\leadsto -13{,}4\%$

Das harmonische Mittel wird in der Praxis vor allem dort verwendet, wo Verhältnisse oder Raten gemittelt werden sollen.

Einschub 7.3.2. ... 2 Strecken : 60km 40km/h | 60km 60km/h

1) AM : $\frac{1}{2}(40 + 60) = 50$

3) HM !
$$\frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{3}{120} + \frac{2}{120}} = 48$$

2) 60km mit 40km/h $\leadsto$ 1,5 h
60km mit 60km/h $\leadsto$ 1 h
Σ 2,5 h für 120 km

$$\Rightarrow \frac{120\text{ km}}{5/2\text{ h}} = \frac{240}{5}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 48\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

7.3.2 Modalwert

Eine Ausprägung a eines Merkmals X ist ein *Modalwert* (oder *Modus*) der Stichprobe $x_1, ..., x_n$, wenn es keine Ausprägung gibt, die in der Stichprobe häufiger vorkommt, d.h. wenn für die Häufigkeitsverteilung H_n der Stichprobe gilt:

$$H_n(a) \geq H_n(x_i) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Modalwerte sind Lagemaße, aber im Allgemeinen nicht eindeutig. Falls doch, werden sie mit x_{mod} bezeichnet und die Häufigkeitsverteilung heißt *unimodal*. Modalwerte lassen sich auch bei Stichproben von nominalen Merkmalen bestimmen.

7.3.3 Quantile

Zu $x_1, ..., x_n$ bezeichne $x_{(1)}, ..., x_{(n)}$ die *geordnete Stichprobe*, d.h. es gilt

$$\{x_1, ..., x_n\} = \{x_{(1)}, ..., x_{(n)}\} \text{ und } x_{(1)} \leq ... \leq x_{(n)}$$

Zur Beschreibung der Struktur einer Stichprobe zieht man dann sogenannte *Quantile* heran:

Definition
Sei $p \in [0, 1]$. Eine Ausprägung x_p heißt p-**Quantil** der Stichprobe $x_1, ..., x_n$, wenn für die Häufigkeitsverteilung h_n gilt:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ a_i \leq x_p}} h_n(a_i) \geq p \qquad \text{und} \qquad \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ a_i \geq x_p}} h_n(a_i) \geq 1 - p, \qquad (\star)$$

d.h. mindestens $p \cdot 100\%$ der Stichprobenwerte sind $\leq x_p$ und mindestens $(1-p) \cdot 100\%$ der Stichprobenwerte sind $\geq x_p$.

Bemerkung

- Für $p = \frac{1}{2}$ heißt das p-Quantil $x_{0,5}$ *Median* (oder *Zentralwert*),

  d.h. mindestens 50 % der Stichprobenwerte sind größer gleich und mindestens 50 % sind kleiner gleich $x_{0,5}$.
- Das $\frac{1}{4}$-Quantil $x_{0,25}$ heißt *unteres Quartil*, das $\frac{3}{4}$-Quantil $x_{0,75}$ *oberes Quartil*.
- $x_{j \cdot 0,1}$ heißt j*-tes Dezil*.
- Im Fall $p = 0$ erhält man den kleinsten Wert, das *Minimum* $x_{min} = x_{(1)}$ der Stichprobe, im Fall $p = 1$ den größten Wert, das *Maximum* $x_{max} = x_{(n)}$.

Alle p-Quantile sind Lagemaße. Verglichen mit dem arithmetischen Mittel ist der Median robuster (d.h. weniger anfällig) gegenüber „Ausreißern".