5.3 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Eine Potenzfunktion zum Exponenten $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit einer Zuordnungsvorschrift vom Typ $f(x) = x^a$.

Was verstehen wir unter x^a für $a \in \mathbb{R}$, z.B. $x^{\sqrt{2}}$? Wir definieren dies schrittweise:

(i) Für $a \in \mathbb{N}$ ist

$$x^a = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{a \text{ Faktoren}}, \qquad \text{und außerdem } x^0 = 1.$$

Diese Definitionen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ zulässig.

(ii) Für $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, ist

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}}.$$

Diese Defintion ist nur noch für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, möglich.

(iii) Für $a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, ist $x^a = x^{\frac{1}{n}}$ das Urbild von x unter der bijektiven Funktion $f_n\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^n$. Wir schreiben dann

$$x^{\frac{1}{n}} := f_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

und speziell $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Diese Definition ist nur möglich für $x \in [0,\infty)$.

(iv) Für $a = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, ist

$$x^a = x^{\frac{m}{n}} := (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

Diese Defintion ist nur noch für $x \in (0,\infty)$ möglich.

Einschub 5.3.1. Schritte (i) bis (iv) an einem Beispiel

I) $a \in \mathbb{N}$ $\quad (-\frac{1}{3})^5 := -\frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

II) $a \in \mathbb{Z}, a < 0$ $\quad (-\frac{1}{3})^{-4} := \frac{1}{(-\frac{1}{3})^4}$ $\quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

Definition $\quad$ hier darf keine 0 stehen

IV) $a \in \mathbb{Q}$ $\quad (\frac{2}{3})^{\frac{4}{5}} := \left(\underbrace{(\frac{2}{3})^{\frac{1}{5}}}\right)^4 = b \cdot b \cdot b \cdot b$ $\quad x \geq 0$ (weil Wurzeln nicht negativ sein können in $\mathbb{R}$)

$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = b \iff b^5 = \frac{2}{3}$

(v) Für $a \in \mathbb{R}$ nähern wir a durch Brüche an, z.B. $a = \sqrt{2}$ durch

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots$$

und betrachten dann

Annähern durch Potenzen

$$x^1, x^{1{,}4}, x^{1{,}41}, x^{1{,}414}, \ldots\ .$$

Diese Werte nähern sich dann $x^{\sqrt{2}}$ an. Genaueres hierzu und insbesondere zu den auftretenden Grenzübergängen werden wir später lernen, wenn wir reelle Zahlenfolgen behandeln. Für den Moment genügt uns diese Anschauung.

Satz 5.3.2 (Rechenregeln für Potenzen)**.** *Seien $x, y \in (0,\infty)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Identitäten*

$$x^{a+b} = x^a \cdot x^b\,,$$
$$(x^a)^b = x^{a\cdot b}\,,$$
$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a\,.$$

$(\frac{1}{3})^{\sqrt{2}+0{,}5} = (\frac{1}{3})^{\sqrt{2}} \cdot (\frac{1}{3})^{0{,}5}$

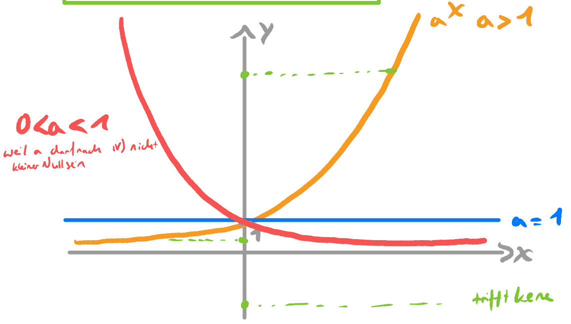
$3^{4^2} = 3^{(4^2)} = 3^{16}$

$(3^4)^2 = 3^{4\cdot 2}$

Definition 5.3.3. Für $a > 0$ heißt die Funktion $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ *Exponentialfunktion zur Basis a*.

Einschub 5.3.4. Graphen der Exponentialfunktion ← Variable in der Potenz und nicht x^a Rollentausch

$\boxed{\exp_a(x) := a^x}$, Variable ist nun in der Potenz (!)



5.3.1 Eigenschaften der Exponentialfunktion

(i) $\exp_a(0) = 1$

gelesen: exp a 0

(ii)

$$\exp_a(-x) \overset{\substack{\text{Def}\\\text{Einsetzen}}}{=} a^{-x} \overset{\text{Def II)}}{=} \frac{1}{a^x} \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{\exp_a(x)},$$

$$\exp_a(x+y) \overset{\substack{\text{Def.}\\\text{fakt}}}{=} a^{x+y} \overset{\text{Potenzgesetz}}{=} a^x a^y \overset{\text{Def}}{=} \exp_a(x) \cdot \exp_a(y),$$ ← Nennt man Funktionalgleichung vom $\exp_a$

$$\exp_a(x)^y \overset{\text{Def}}{=} (a^x)^y \overset{\text{Potenzgesetz}}{=} a^{xy} \overset{\text{Def}}{=} \exp_a(x \cdot y)$$

(iii) $\exp_a$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend, für $0 < a < 1$ streng monoton fallend und für $a = 1$ konstant gleich 1.

↳ bedeutet injektiv

(iv) Für das Bild von $\mathbb{R}$ unter der Exponentialfunktion gilt für $a \neq 1$: $\exp_a(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

Das Bild von $\exp_a = \exp_a(\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{gesamte Definitionsbereich}}) = (0, +\infty)$

Definition 5.3.5 (Logarithmus)**.** Aufgrund der letzten beiden Eigenschaften ist die Exponentialfunktion $\exp_a\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ bijektiv. Die Umkehrfunktion

Konstante ist nicht Umkehrbar

$$\log_a\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

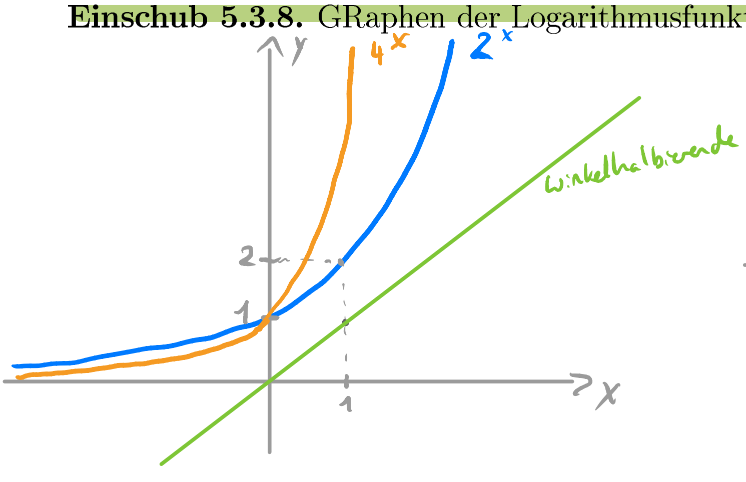
heißt *Logarithmus zur Basis a*.

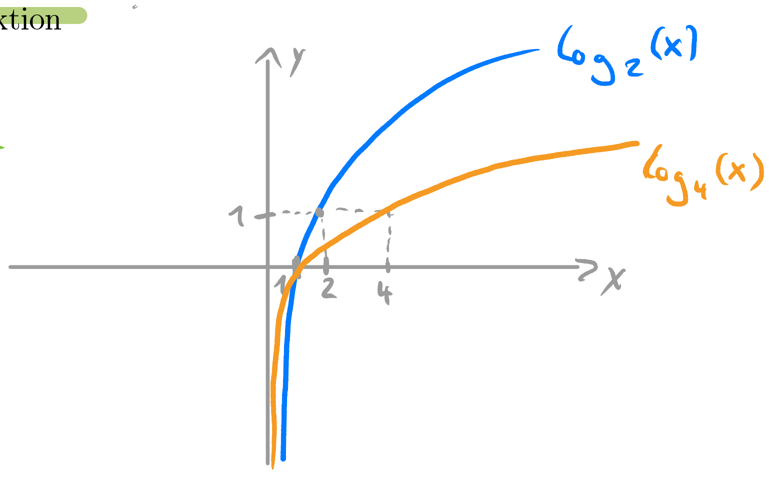
Bemerkung 5.3.6. Da der Logarithmus gemäß Definition die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion ist, gilt also:

Einschub 5.3.7. ...

$\exp_a(\underbrace{\log_a}_{\text{Umkehrfakt}}(x)) = x$, $\log_a(\exp_a(x)) = x$

Einschub 5.3.8. GRaphen der Logarithmusfunktion





5.3.2 Eigenschaften der Logarithmusfunktion

Satz 5.3.9 (Rechenregel für Logarithmen).

(i) $\log_a(1) = 0$

(ii) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(iii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

(iv) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x), \quad r \in \mathbb{R}$

$\log_{\frac{1}{3}}(4^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(4)$

Basiswechsel beim Logarithmus

(v) $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

$\log_2(x) = \frac{\log_5(x)}{\log_5(2)}$

Wechsel zwei durch hier: Wechsel

Beliebige Zahl zu $a = 5$

dadurch reicht es sich auf einen Fall zu spezialisieren

Teil (v) heißt: ein Basiswechsel beim Logarithmus bedeutet eine lineare Skalierung (vertikales Strecken/Stauchen). Entsprechend reicht die genaue Betrachtung nur einer Basis.

Die Funktion $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv, für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $a < 1$ streng monoton fallend.

Häufig werden die folgenden Basen verwendet:

- $a = 10$: *Zehnerlogarithmus* $\log_{10} =: \log$
- $a = 2$: *Zweierlogarithmus* $\log_2 = \mathrm{ld}$,
- $a = e$: *Natürlicher Logarithmus*, (e *Eulersche Zahl*, vgl. unten). Für den natürlichen Logarithmus schreiben wir ln statt $\log_e$.

Streckfaktor

$\exp_a(x) = e^{\ln(a) \cdot x}$

Bemerkung 5.3.10 (Basiswechsel). Jede andere Basis erhält man dann durch:

Einsetzen in a^x Potenzgesetz

$$\exp_a(x) = a^x = (\exp_e(\log_e(a)))^x = (\exp_e(\ln(a)))^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{\ln(a) \cdot x},$$

5.3.7 $\exp_e(\log_e(a)) = a$

d.h. jede Exponentialfunktion ist eine linear skalierte natürliche Exponentialfunktion (horizontales Strecken/Stauchen).

$\ln(e) = \log_e(e) = 1$

5.3.3 Exponentielles Wachstum

Betrachte die Funktion

$$f(x) = c \cdot a^x, \quad a > 0, \; a \neq 1,$$

dann gilt für ein festes $\Delta x \in \mathbb{R}$:

Einsetzen   Potenzgesetz $a^{\Delta x} = c_{\Delta x}$

$$f(x + \Delta x) = c \cdot a^{x + \Delta x} = \underbrace{c \cdot a^x}_{=} \cdot a^{\Delta x} = f(x) \cdot a^{\Delta x} = c_{\Delta x} \cdot f(x),$$

wobei

$$c_{\Delta x} := a^{\Delta x}.$$

Eine Änderung des Arguments x um eine feste Größe Δx bewirkt daher eine *Multiplikation* mit einem von Δx (aber nicht von x) abhängigen, aber sonst festen Faktor $c_{\Delta x}$. Ein solches Wachstumsverhalten heißt *exponentielles Wachstum*.

Zum Vergleich bewirkt bei linearem Wachstum, beschrieben durch $l(x) = ax + b$, die Änderung des Arguments um Δx die *Addition* einer festen Größe, nämlich

Drauf addiert

$$l(x + \Delta x) = \underbrace{a(x + \Delta x) + b}_{\text{Einsetzen}} = \overbrace{ax + a\Delta x + b}^{= l(x)} = l(x) + a\Delta x.$$

Ist $a < 1$, ist f streng monoton fallend. In diesem Fall spricht man auch von *exponentiellem Abklingen*. Exponentielles Wachstum kommt typischerweise in Modellen für Wachstums- oder Zerfallsprozesse vor:

Beispiele

- Bevölkerungswachstum, Zellwachstum, radioaktiver Zerfall
- Berechnung von Zinseszinsmodellen, Modelle für Mehrfachverzinsung pro Jahr, kontinuierliche Verzinsung

In diesen Fällen wählt man häufig t als Variable für die Zeit. Diejenige Schrittweite Δt, für die

- $c_{\Delta t} = 2$ gilt, nennt man *Verdopplungszeit*
- $c_{\Delta t} = \frac{1}{2}$ gilt, nennt man *Halbwertszeit.*

Verdopplungszeit: $f(t+\Delta t) = \underbrace{c_{\Delta t}}_{=2} \cdot f(t)$

Halbwertszeit: $f(t+\Delta t) = \underbrace{c_{\Delta t}}_{=\frac{1}{2}} \cdot f(t)$

Für die Verdopplungszeit Δt gilt wegen

$$\boxed{f(t+\Delta t) = c_{\Delta t} \cdot f(x) = 2 \cdot f(t)}$$

folglich

$$a^{\Delta t} = c_{\Delta t} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta t = \log_a 2.$$

Entsprechend erhält man für die Halbwertszeit: $\Delta t = \log_a \frac{1}{2}$

Einschub 5.3.11. Beispiel zur Halbwertzeit

Hier steigen wir nächstes mal wieder ein

Verdopplungszeit

$a^{\Delta t} = 2 \quad | \log_a$

$\log_a(a^{\Delta t}) = \log_a(2)$

PG $\Rightarrow \Delta t \cdot \underbrace{\log_a(a)}_{=1} = \log_a(2)$

Wie oben dargestellt kann die Funktion f mithilfe der natürlichen Exponentialfunktion (*e-Funktion*) beschrieben werden, nämlich

$$f(x) = c \cdot a^x = c \cdot e^{\ln(a)\cdot x} = c \cdot e^{\lambda x}.$$

In diesem Fall heißt $c = f(0)$ *Anfangswert* und $\lambda \neq 0$ *Wachstumsrate* .

Exponentielles Wachstum ist schnell, insbesondere schneller als jedes polynomielle Wachstum. Logarithmisches Wachstum hingegen ist langsamer als jedes polynomielle Wachstum. Was dies präziser bedeutet klären wir im nächsten Kapitel.

Beispiele 5.3.12.

- *Bevölkerungswachstum:* In einem Modell für das Bevölkerungswachstum nehmen wir an, dass die Zunahme der Bevölkerung proportional mit Proportionalitätsfaktor p zur Größe der Bevölkerung $f(t)$ ist, d.h. es gilt:

  Kommt hinzu — Proportional zu dem was schon da war — Ausklammern

  $$f(t+1) - f(t) = p \cdot f(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(t+1) = (1+p) \cdot f(t)$$

  Gegeben die Größe n_0 der Bevölkerung zur Zeit $t = 0$, so erhalten wir

  $f(0) = n_0$ $\quad$ $f(1) = f(0)\cdot(1+p) = n_0(1+p)$

  $f_2 = (1+p)\, f(1) = (1+p)\cdot(n_0(1+p)) = n_0(1+p)^2$

  Daraus folgt

  $$\boxed{f(t) = n_0 \cdot (1+p)^t}$$

  als exponentielles Modell für die Beschreibung der Bevölkerungsentwicklung. Die unbekannten Parameter p und n_0 müssen jetzt aus vorhandenen Daten bestimmt werden. Die Weltbevölkerung betrug 2010 etwa 6,96 Mrd. und 2020 etwa 7,79 Mrd. Menschen. Setzen wir den Zeitpunkt $t = 0$ für das Jahr 2010, so folgt:

  $$f(0) = n_0 = 6,96 \qquad \text{(in Mrd.)}$$

  und

  $$f(10) = \boxed{n_0 \cdot (1+p)^{10}} = 7,79, \qquad |: n_0$$

  $$\Rightarrow \quad (1+p)^{10} = \frac{7,79}{6,96} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt[10]{\frac{7,79}{6,96}} - 1 \approx 0,0113 = 1,13\%.$$

  Entsprechend verdoppelt sich die Bevölkerung in $\underbrace{\log_{1+p}}_{\text{Basis weil das Hoch } t \text{ genommen wird}} 2 = \frac{\log 2}{\log(1+p)} \approx 61,5$ Jahren.