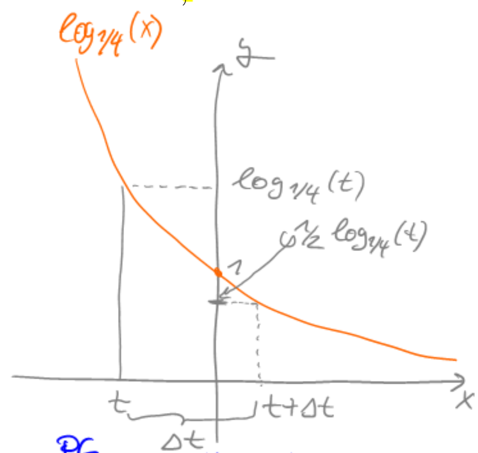
- Bevölkerungswachstum, Zellwachstum, radioaktiver Zerfall
- Berechnung von Zinseszinsmodellen, Modelle für Mehrfachverzinsung pro Jahr, kontinuierliche Verzinsung

In diesen Fällen wählt man häufig t als Variable für die Zeit. Diejenige Schrittweite Δt, für die

- $c_{\Delta t} = 2$ gilt, nennt man *Verdopplungszeit*
- $c_{\Delta t} = \frac{1}{2}$ gilt, nennt man *Halbwertszeit*.



Für die Verdopplungszeit Δt gilt wegen

$$f(t + \Delta t) = c_{\Delta t} \cdot f(x) = 2 \cdot f(t)$$

folglich

$$a^{\Delta t} = c_{\Delta t} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta t = \log_a 2.}$$

Entsprechend erhält man für die Halbwertszeit: $\boxed{\Delta t = \log_a \frac{1}{2}}$

Einschub 5.3.11. Beispiel zur Halbwertzeit $f(x) := 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$$f(x+\Delta x) = \frac{1}{2} f(x) \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \overset{PG}{\underset{:3}{\Leftrightarrow}} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{\Delta x} = \frac{1}{2} \overset{\log_{1/4}}{\Leftrightarrow} \log_{1/4}\left(\frac{1}{4}^{\Delta x}\right) = \log_{1/4}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\overset{LG}{\Leftrightarrow} \Delta x \cdot \overbrace{\log_{1/4}(1/4)}^{=1} = \log_{1/4}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \Delta x = \log_{1/4}\left(\frac{1}{2}\right) \overset{LG}{=} \log_{1/4}(1)$$

$$- \log_{1/4}(2) = - \log_{1/4}(2)$$

$\log_a(1) = 0$

Wie oben dargestellt kann die Funktion f mithilfe der natürlichen Exponentialfunktion (*e-Funktion*) beschrieben werden, nämlich

$$f(x) = c \cdot a^x = c \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = c \cdot e^{\lambda x}.$$

$a^x = \exp_e(\log_e(a^x)) = e^{(\ln a^x)} \overset{LG}{=} e^{x \cdot \ln(a)}$

In diesem Fall heißt $c = f(0)$ *Anfangswert* und $\lambda \neq 0$ *Wachstumsrate* .
Exponentielles Wachstum ist schnell, insbesondere schneller als jedes polynomielle Wachstum. Logarithmisches Wachstum hingegen ist langsamer als jedes polynomielle Wachstum. Was dies präziser bedeutet klären wir im nächsten Kapitel.

Beispiele 5.3.12. am 28.11. behandelt

- *Bevölkerungswachstum:* In einem Modell für das Bevölkerungswachstum nehmen wir an, dass die Zunahme der Bevölkerung proportional mit Proportionalitätsfaktor p zur Größe der Bevölkerung $f(t)$ ist, d.h. es gilt:

$$f(t+1) - f(t) = p \cdot f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t+1) = (1+p) \cdot f(t)$$

Gegeben die Größe n_0 der Bevölkerung zur Zeit $t = 0$, so erhalten wir

$$f(t) = n_0 \cdot (1+p)^t$$

als exponentielles Modell für die Beschreibung der Bevölkerungsentwicklung. Die unbekannten Parameter p und n_0 müssen jetzt aus vorhandenen Daten bestimmt werden. Die Weltbevölkerung betrug 2010 etwa 6,96 Mrd. und 2020 etwa 7,79 Mrd. Menschen. Setzen wir den Zeitpunkt $t = 0$ für das Jahr 2010, so folgt:

$$f(0) = n_0 = 6,96 \qquad \text{(in Mrd.)}$$

und

$$f(10) = n_0 \cdot (1+p)^{10} = 7,79,$$

$$\Rightarrow \quad (1+p)^{10} = \frac{7,79}{6,96} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt[10]{\frac{7,79}{6,96}} - 1 \approx 0,0113 = 1,13\%.$$

Entsprechend verdoppelt sich die Bevölkerung in $\log_{1+p} 2 = \frac{\log 2}{\log(1+p)} \approx 61,5$ Jahren.

- *Zellwachstum:* Durch Zellteilung verdoppelt sich die Zahl der Zellen in einer gegebenen Zeitspanne Δt, d.h. die Verdopplungszeit ist mit Δt gegeben. Entsprechend kann man im Wachstumsmodell für die Anzahl der Zellen

$$N(t) = N_0\, a^t \qquad N(0) = N_0 \cdot a^0 = N_0$$

mit Anfangszellenzahl N_0 die Basis a bestimmen durch

$$a^{\Delta t} = 2 \Leftrightarrow a = 2^{\frac{1}{\Delta t}}.$$

"hoch $\frac{1}{\Delta t}$"

$$a^{\Delta t} = 2 \Leftrightarrow (a^{\Delta t})^{1/\Delta t} = 2^{1/\Delta t} \overset{PG}{\Leftrightarrow} a^{\overbrace{\Delta t \cdot \frac{1}{\Delta t}}^{=1}} = 2^{1/\Delta t}$$

Es gilt also

$$N(t) = N_0 \cdot (\overbrace{2^{\frac{1}{\Delta t}}}^{=a})^t = N_0 \cdot 2^{t/\Delta t}. =$$

Wählt in dem Modell man die Eulersche Zahl als Basis, so erhalten wir $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$ mit der Wachstumsrate $\lambda = \frac{\ln 2}{\Delta t}$, denn:

$$= N_0 \cdot (\underbrace{2^{1/\Delta t}}_{=a})^t \underset{\text{s. oben}}{\Rightarrow} \lambda = \ln(a) = \ln(2^{1/\Delta t}) \overset{PG}{=} \frac{1}{\Delta t} \cdot \ln(2) = \frac{\ln(2)}{\Delta t}$$

- *Radioaktiver Zerfall:* Sei $N(t)$ die Anzahl radioaktiver Kerne zur Zeit t. Wir nehmen an, dass die Anzahl der zerfallenden Atome pro Zeiteinheit proportional zu der Anzahl vorhandener Atome ist.

Wie im ersten Beispiel erhalten wir exponentielles Wachstum, hier mit negativer Wachstumsrate, also ein exponentielles Abklingen. Entsprechend setzen wir folgendes Modell an:

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}, \text{ mit } \lambda > 0.$$

Die Halbwertszeit Δt ist die Zeitspanne, in der sich die Anzahl Atome halbiert, also für die $e^{-\lambda \Delta t} = \frac{1}{2}$ gilt. Logarithmieren liefert mithilfe der Logarithmengesetze die Gleichung

$$\Delta t = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

$$e^{-\lambda \Delta t} = \frac{1}{2} \overset{\ln}{\Leftrightarrow} -\lambda \Delta t = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-\lambda} = \frac{\overbrace{\ln 1}^{=0} - \ln 2}{-\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

- *Zinseszinsmodell:* Ein Anfangsguthaben K_0 wird jährlich mit Zinsrate p verzinst. Wird das Guthaben nicht verändert, verfügt man dank Zinseszins nach n Jahren über ein Guthaben in Höhe von

$$K(n) = (1+p)^n \cdot K_0.$$

Bsp $p = 0{,}17$, $100 = K_0$

$K_1 = (1+0{,}17) \cdot 100 = 1{,}17 \cdot 100$

$$K(0) = (1+p)^0 K_0 = K_0, \quad K(1) = (1+p) K_0, \quad K(2) = (1+p) K(1) = (1+p)^2 K_0$$

Bei unterjähriger Verzinsung wird innerhalb eines Jahres das Kapital m Mal verzinst (z.B. bei $m = 4$ quartalsweise, bei $m = 12$ monatlich usw.). Geschieht dies mit dem *Nominalzins* $p\,\%$ bedeutet das, dass das Kapital im Jahr m mal mit $\frac{p}{m}\%$ verzinst wird, d.h. am Ende des Jahres beträgt das Guthaben $\left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^m \cdot K_0$. Das entspricht einer Verzinsung mit $\left(\underbrace{\underbrace{\left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^m}_{=1{,}28} - 1}_{=0{,}28}\right) \cdot 100\%$. Diesen Zins nennt man *effektiven Jahreszins*.

$\hat{=}$ 28%

$\underline{m = 2}$ $\quad p \mathrel{\hat{=}} 3\%$ Verzinsung

$\underline{\text{nach } \tfrac{1}{2} \text{ Jahr}}$ $\quad K_0 \cdot \left(1 + \frac{p/2}{100}\right) = K_0 \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right)$

nach 1 Jahr $\quad K_0\left(1+\frac{p/2}{100}\right)^2 = K_0\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)^2$

mit p % jährlich verzinsen, ist das weniger, denn:

$$\left(1+\frac{p/2}{100}\right)^2 \overset{\text{Bin}}{=} 1+\frac{p}{100}+\underbrace{\left(\frac{p/2}{100}\right)^2}_{>0} > 1+\frac{p}{100}$$

5.4 Trigonometrische Funktionen

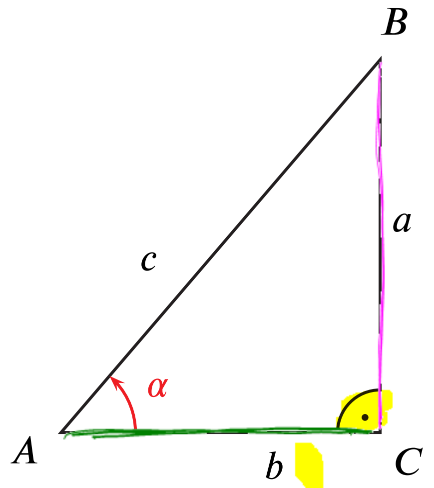
Ziel "sin" und "cos" als Funktionen verstehen

Ist in einem rechtwinkligen Dreieck ein weiterer Winkel α bekannt, so ist auch der dritte Winkel bekannt (Innenwinkelsumme) und folglich sind je zwei solche Dreiecke ähnlich.
Damit müssen sie nicht gleichen Seitenlängen besitzen, aber die Verhältnisse der Seitenlängen sind gleich und hängen damit nur von dem Winkel α ab.
Man nennt

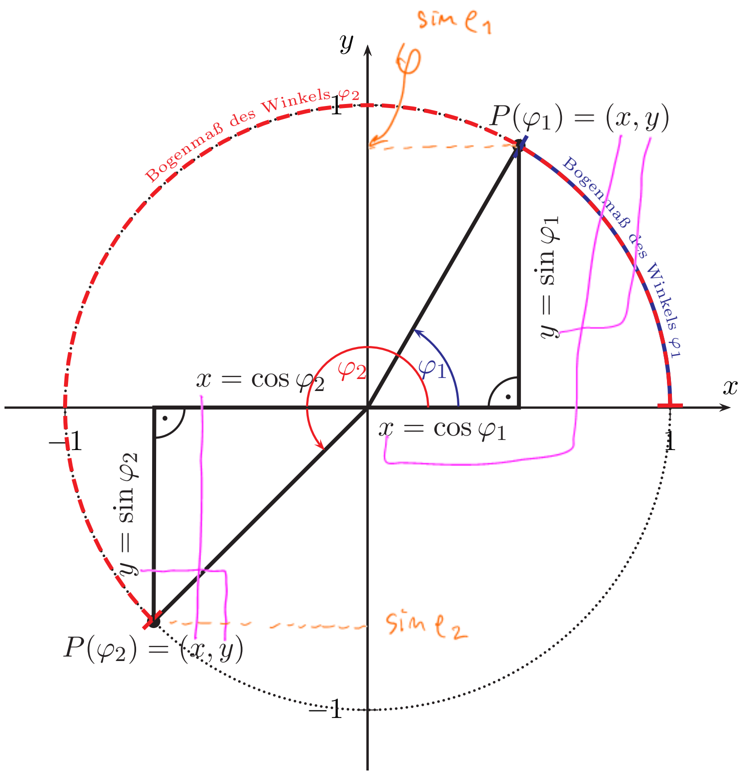
die dem Winkel α gegenüberliegende Seite die **Gegenkathete** (G)	Länge: a
die am Winkel α anliegende Seite die **Ankathete** (A)	Länge: b
die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die **Hypotenuse** (H)	Länge: c

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \text{"}\frac{G}{H}\text{"}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \text{"}\frac{A}{H}\text{"}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{"}\frac{G}{A}\text{"}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b}$$



Wählt man speziell für die Hypotenusenlänge $c = 1$, so lassen sich die Werte von Sinus und Kosinus veranschaulichen, indem man das Dreieck in den Einheitskreis einpasst (mit der Hypotenuse als Radius):



$$\sin\varphi_1 = \text{"}\frac{G}{H}\text{"} = \frac{a}{c} = a$$
$$\cos\varphi_1 = \text{"}\frac{A}{H}\text{"} = \frac{b}{c} = b$$

Pythagoras:

$$(\cos\varphi_1)^2 + (\sin\varphi_1)^2 = 1^2 = 1$$

Bogenmaß:

$$\frac{\varphi_1}{360} = \frac{x}{2\pi}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi\cdot\varphi_1}{360}$$

2π = Umfang Einheitskreis

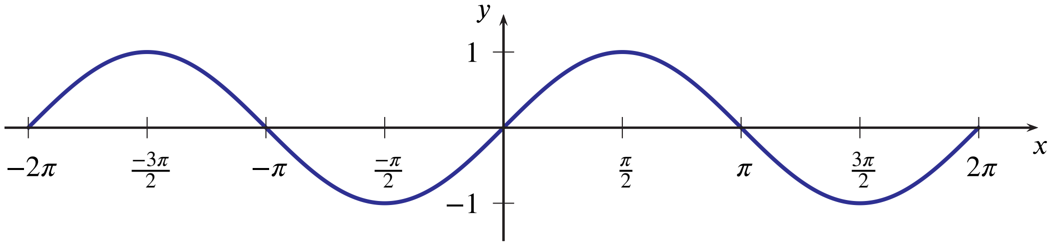
Meistens geben wir Winkel im Bogenmaß an. Das ist die Länge des Bogenstücks am Einheitskreis, das dem Winkel zugeordnet ist. Ist ein Winkel ϕ im Gradmaß gegeben, so berechnet sich das zugehörige Bogenmaß t mit der Formel

$$t = \frac{\phi}{360°}\cdot 2\pi\,.$$

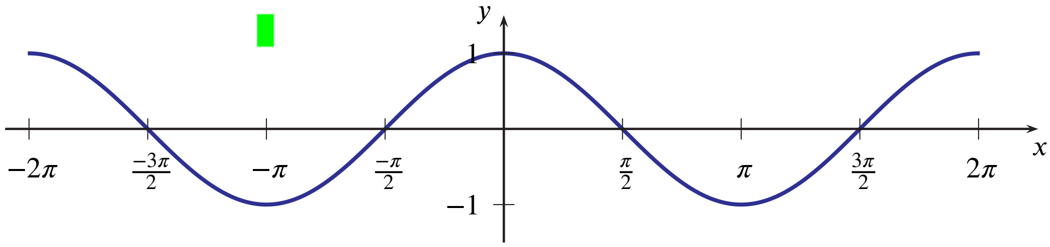
↑ s. oben

Auf diese Weise erhält man die trigonometrischen Funktionen

$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

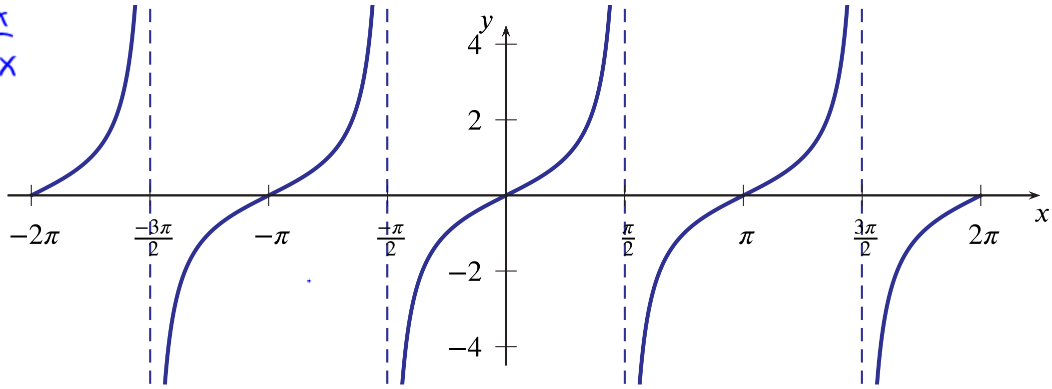


$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



$\tan : \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} \to \mathbb{R}$

$\tan(x) := \frac{\sin x}{\cos x}$



Hier ist ein schönes Applet, mit Hilfe dessen man die trigonometrischen Funktionen veranschaulichen kann:
`https://www.geogebra.org/m/FJtrEDAr`

Kapitel 6

Konvergenz von Zahlenfolgen

Motivation: Warum reichen die rationalen Zahlen nicht aus?

Da man in $\mathbb{Q}$ uneingeschränkt Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und (außer durch 0) Dividieren kann, sind *lineare Gleichungen*, also Gleichungen der Form $ax + b = 0$ für $a \neq 0$, in $\mathbb{Q}$ stets lösbar. Das Quadrieren kann in $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen nicht rückgängig gemacht werden, d.h. (selbst) für $a > 0$ ist die Gleichung $x^2 - a = 0$ in $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen nicht lösbar:

Satz 6.0.1. *Eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ ist keine rationale Zahl.*
Die positive Lösung der Gleichung, die in den reellen Zahlen existiert, bezeichnen wir mit $\sqrt{2}$ („Wurzel 2").

Einschub 6.0.2. ... Beweis Annahme $\sqrt{2} = p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ in $\boxed{\text{gekürzter Form}}$. Dann gilt: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow q\sqrt{2} = p$

$\Rightarrow q^2 \cdot 2 = p^2 \Rightarrow p^2$ gerade $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ p gerade $\Rightarrow$ es gibt Zahl $r \in \mathbb{N}$: $p = 2r \Rightarrow p^2 = 4r^2 \Rightarrow q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{4r^2}{2} = 2r^2$

$\Rightarrow q^2$ gerade $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ q gerade. Also p gerade und q ist gerade, also p/q ungekürzt im Widerspruch zur $\boxed{\text{Annahme}}$

Bleibt $(*)$ $z \in \mathbb{N}$ ungerade $\Rightarrow$ es gibt $s \in \mathbb{N}$: $z = 2s + 1$

$\Rightarrow z^2 = (2s+1)^2 = 4s^2 + 2s + 1 = 2(2s^2 + s) + 1$

$\Rightarrow z^2$ ungerade

Bemerkung: Ähnlich zeigt man, dass $\sqrt{m} \in \mathbb{Q}$ genau dann gilt, wenn m eine Quadratzahl ist.

$\mathbb{Q}$ besitzt also Lücken.
Man beschreibt diese Lücken, indem man **Intervallschachtelungen** konstruiert, d.h. Folgen von Intervallen

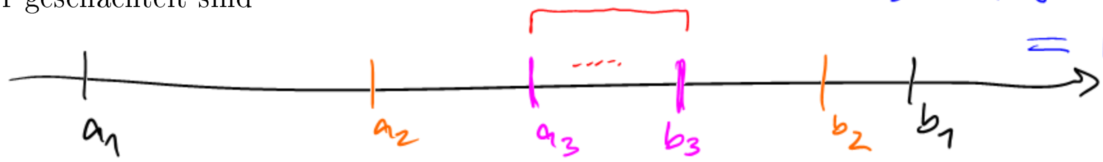
$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ [a_3, b_3],\ \ldots, \qquad a_n, b_n \in \mathbb{Q},$$

die ineinander geschachtelt sind

$= b_3 - a_3$

$[a_1,b_1] \cap [a_2,b_2] \cap [a_3,b_3]$

$= [a_3,b_3]$



$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots$$

und deren Länge $\boxed{b_n - a_n}$ für $n \to \infty$ gegen Null strebt.

Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ zeichnet nun gerade aus, dass es für jede Intervallschachtelung eine reelle Zahl x gibt, die im Durchschnitt aller Intervalle liegt:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

Auf diese Weise „schließt" man die Lücken in $\mathbb{Q}$ und man nennt diese Eigenschaft die **Vollständigkeit** von $\mathbb{R}$.

Die **Dezimalbruchentwicklung** nutzt gerade diese Möglichkeit, reelle Zahlen durch eine Intervallschachtelung zu beschreiben:
Während ein *abbrechender Dezimalbruch*:

$$a_0, a_1 a_2 ... a_n := a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + ... + a_n \cdot 10^{-n} = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k},$$

mit $a_0 \in \mathbb{Z},\ a_1, ..., a_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$

eine endlich Summe ist und stets eine rationale Zahl beschreibt, gibt es auch *unendliche Dezimalbrüche*

$$a_0, a_1 a_2 a_3 ... := a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + ... = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}}_{?}.$$

Damit meint man, dass z.B.

$$\pi = 3,141592659\ldots$$

durch die Intervallschachtelung beschrieben wird, die durch Abbrechen nach n Stellen entsteht, also

n	
0	$\pi \in [3; 4]$
1	$\pi \in [3,1; 3,2]$
2	$\pi \in [3,14; 3,15]$
$\vdots$	$\vdots$
7	$\pi \in [3,1415926; 3,1415927]$
$\vdots$	$\vdots$

Im Folgenden soll nun geklärt werden, was die mathematisch präzise Bedeutung einer unendlichen Summe, z.B. der unendlichen Dezimalbruchentwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$, ist und wie man irrationale Zahlen wie etwa $\sqrt{2}$ (effizient) näherungsweise bestimmen kann.