die ineinander geschachtelt sind

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots$$

und deren Länge $b_n - a_n$ für $n \to \infty$ gegen Null strebt.
Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ zeichnet nun gerade aus, dass es für jede Intervallschachtelung eine reelle Zahl x gibt, die im Durchschnitt aller Intervalle liegt:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

Auf diese Weise „schließt" man die Lücken in $\mathbb{Q}$ und man nennt diese Eigenschaft die **Vollständigkeit** von $\mathbb{R}$.
Die **Dezimalbruchentwicklung** nutzt gerade diese Möglichkeit, reelle Zahlen durch eine Intervallschachtelung zu beschreiben:
Während ein *abbrechender Dezimalbruch*:

$$a_0, a_1a_2...a_n := a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + ... + a_n \cdot 10^{-n} = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k},$$

$n = 2$ $\quad 3,14 = 3 + 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,01$

mit $a_0 \in \mathbb{Z},\ a_1, ..., a_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$

endliche Summe

eine endlich Summe ist und stets eine rationale Zahl beschreibt, gibt es auch *unendliche Dezimalbrüche*

$$a_0, a_1a_2a_3... := a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + ... = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}}_{?}.$$

„Symbol"

Damit meint man, dass z.B.

$$\pi = 3,141592659\ldots$$

durch die Intervallschachtelung beschrieben wird, die durch Abbrechen nach n Stellen entsteht, also

n	
0	$\pi \in [3; 4]$
1	$\pi \in [3,1; 3,2]$
2	$\pi \in [3,14; 3,15]$
$\vdots$	$\vdots$
7	$\pi \in [3,1415926; 3,1415927]$
$\vdots$	$\vdots$

geschachtelte Intervalle

Im Folgenden soll nun geklärt werden, was die mathematisch präzise Bedeutung einer unendlichen Summe, z.B. der unendlichen Dezimalbruchentwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$, ist und wie man irrationale Zahlen wie etwa $\sqrt{2}$ (effizient) näherungsweise bestimmen kann.

6.1 Konvergenz von Folgen und Reihen

Motivation II: Wir haben gesehen, dass der effektive Jahreszins bei unterjähriger Verzinsung mit $\frac{p}{m}\%$ mehr erwirtschaftet als die jährliche Verzinsung mit $p\%$. Für $p = 0.05$ (also 5% Zinsen) lautet die Formel für das Kapital

$$K(m) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{0.05}{m}\right)^m$$

wobei zum Beispiel mit $m = 12$ monatlich und $m = 365$ tägliche Verzinsung gemeint ist.

Frage: Wie groß wird $K(m)$ wenn wir m sehr groß werden lassen?

Antwort:

$$K(m) \xrightarrow[\text{groß}]{m \text{ sehr, sehr}} e^{0{,}05} \cdot K_0$$

Definition 6.1.1. Eine Folge reeller Zahlen ist eine Funktion

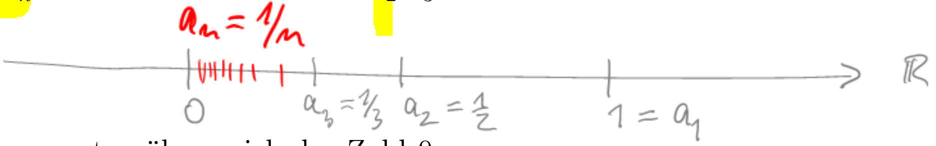
$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a(n) := a_n,$$

die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet. Die Zahl a_n heißt das n-te Glied der Folge, die Folge insgesamt wird mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. kurz mit (a_n) oder auch a_n bezeichnet.

Beispiele 6.1.2.

(i) $a_n = n^2$, Folge der Quadratzahlen: 1, 4 ,9, 16, ... $a_1 = 1^2 = 1,\ a_2 = 2^2 = 4, \ldots$

(ii) $a_n = \frac{1}{n}$, "harmonische" Folge: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ...



Die Folgenwerte nähern sich der Zahl 0 an.

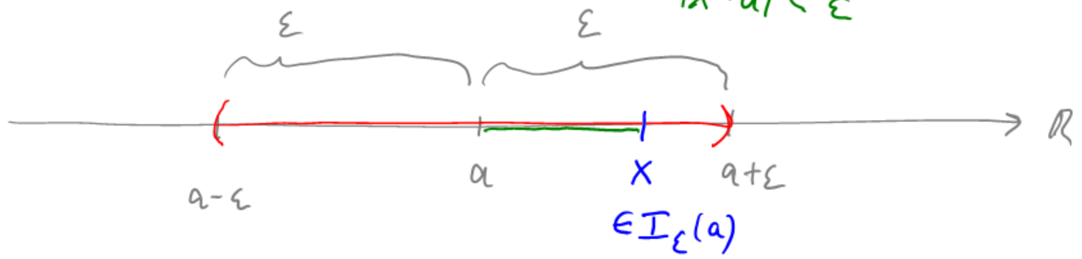
Dieses Bild wird präzisiert in der Definition der Konvergenz einer Folge:

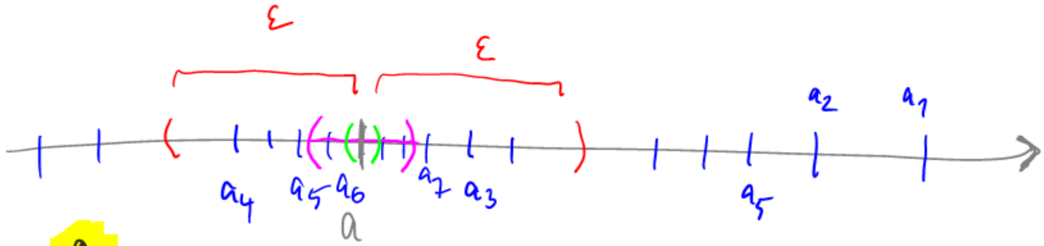
Definition 6.1.3. Zu einem $\varepsilon > 0$ definiert man die *ε-Umgebung von a* $\in \mathbb{R}$ als das Intervall

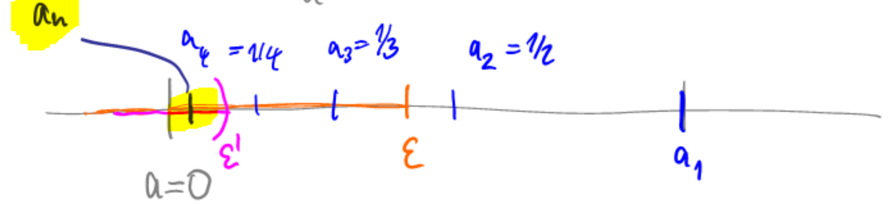
$$I_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

Einschub 6.1.4. ...

$|x - a| < \varepsilon$







Die Folge a_n *konvergiert* für $n \to \infty$ gegen einen *Grenzwert* $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen **alle, bis auf endlich viele** Folgenglieder a_n in der ε-Umgebung $I_\varepsilon(a)$ von a.
Eine Folge a_n heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, das Grenzwert der Folge ist. Andernfalls heißt die Folge **divergent**.

Mit anderen Worten: Egal wie klein ε gewählt wird, ab einer gewissen Nummer liegen alle Folgenglieder in der ε-Umgebung von a.
In diesem Fall schreiben wir kurz:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \text{ für } n \to +\infty.$$

Man spricht: a_n geht/strebt gegen a für n gegen unendlich.

Beispiele 6.1.5.

- Die konstante Folge $(a, a, a, a, \ldots)$ konvergiert gegen a. $a_1 = a,\ a_2 = a, \ldots$

  Einschub 6.1.6. ... Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

  $a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = I_\varepsilon(a)$, also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ □

- *Harmonische Folge:* Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen $a = 0$:

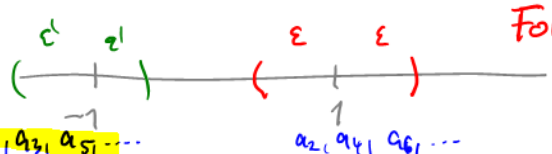
  Einschub 6.1.7. ... Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ gilt: $a_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$ also $a_n \in I_\varepsilon(0)$ □

- *Geometrische Folge:* Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Dann gilt $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$. zB $x = \frac{1}{2}$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

  Einschub 6.1.8. ... Beweis: Für $x = 0$ stimmt das. ✓
  Sei $x \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann: $|x| < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{|x|} =$
  $= 1 + q$ mit $\underset{}{q > 0} \Rightarrow \frac{1}{|x^n|} = \frac{1}{|x|^n} = (1+q)^n$
  $\overset{\text{Bernoullische Ungleichung}}{>} 1 + nq \Rightarrow |x^n| < \frac{1}{1+nq}$
  $\Rightarrow |x^n| < \frac{1}{1+n\underbrace{q}_{>0}} < \varepsilon$ für genügend große $n \in \mathbb{N}$ □

- Die *alternierende* Folge $a_n = (-1)^n$, also $(a_n) = (-1, 1, -1, \ldots)$ ist nicht konvergent.

  Einschub 6.1.9. ... a_n nicht konvergent gegen 1, denn alle ungeraden Folgenglieder sind außerhalb $I_\varepsilon(a)$ $(\varepsilon > 0)$

  Also insgesamt a_n ~~nicht~~ divergent

6.1.1 Grenzwertsätze

Man kann mit „$\lim_{n\to\infty}\cdots$“ auch „rechnen“, aber nur falls es sich um konvergente Folgen handelt.

Satz 6.1.10 (Grenzwertsätze)**.** *Es seien a_n, b_n reelle Zahlenfolgen. Weiterhin seien a_n und b_n konvergent mit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. Dann gilt:*

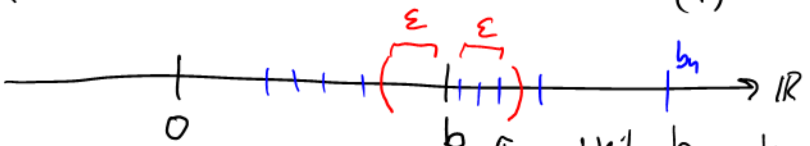
(i) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(iii) *Ist $b \neq 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ konvergiert und es gilt:* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

zu i) $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[(i)]{n\to\infty} 0+0 = 0$

zu iii)



← weil b_n konvergent liegen in $I_\varepsilon(b)$ unendlich viele a_n's

also $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots\ldots$

Beispiele 6.1.11.

1) $a_n = n$, $b_n = 1/n$, $a_n \cdot b_n = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$

2) $a_n = n^2$, $b_n = 1/n$, $a_n \cdot b_n = n$ nicht konvergent

3) $a_n = 2n$, $b_n = 1/n$, $a_n \cdot b_n = 2 \to 2$

Beispiele 6.1.12. Sei $a_n = \frac{n^2+4n}{2n^2+1}$.

$$a_n = \frac{n^2+4n}{2n^2+1} \underset{\text{TRICK}}{=} \frac{n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+4/n}{2+1/n^2}$$

Es gelten: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{4}_{=a_n}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n} \overset{GWS(ii)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} 4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 4\cdot 0 = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} \overset{GWS(ii)}{=} 0\cdot 0$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty} 1+4/n \overset{GWS(i)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n} \overset{1)}{=} 1+0 = 1$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n^2} \underset{2)}{\overset{GWS(i)}{=}} 2+0 = 2$

Definition 6.1.13 (beschränkt)**.** Sei a_n ein Folge. Wir nennen a_n *beschränkt* wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ (sogenannte Schranke) gibt, so dass

$$|a_n| \leq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

gilt.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+4/n}{2+1/n^2} \underset{3)4)}{\overset{GWS(iii)}{=}} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1+4/n}{\lim 2+1/n^2} \underset{3)4)}{=} \frac{1}{2}$

$n \to \infty$

Def. 6.1.13

Beispiele 6.1.14.

(i) $a_n = \frac{1}{n}$ ist beschränkt durch $K = 1$, denn

Einschub 6.1.15. ...

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| = |\frac{1}{n}| \leq 1 = K$

(ii) $b_n = n$ ist **nicht** beschränkt.

Einschub 6.1.16. ... b_n nicht beschränkt $:\Leftrightarrow$ Zu jedem $K \in \mathbb{R}, K > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $|b_{n_0}| > K$.

zu $b_n := n$. ~~Sei $K > 0$~~. Wähle $n_0 := \lceil K+1 \rceil$ aufrunden auf nächstgrößere natürliche Zahl

Dann gilt: $b_{n_0} = n_0 = \lceil K+1 \rceil > K$ $\square$

(iii) $c_n = (-1)^n$ ist beschränkt, denn

$$|c_n| = |(-1)^n| = 1 =: K$$

(iv) $d_n = \sin(n)$ ist beschränkt, denn wir haben bereits gesehen, dass $\underbrace{|\sin(n)| \leq 1}_{=:K}$ gilt, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 6.1.17 (Nullfolge · beschränkt = Nullfolge)**.** *Sei a_n ein beschränkte Folge und b_n eine Nullfolge (d.h. eine konvergente Folge mit Grenzwert 0). Dann ist die Folge $a_n \cdot b_n$ eine Nullfolge.*

Beweis:

Einschub 6.1.18. ...