Beispiele 6.1.14.

(i) $a_n = \frac{1}{n}$ ist beschränkt durch $K = 1$, denn

Einschub 6.1.15. ...

(ii) $b_n = n$ ist **nicht** beschränkt.

Einschub 6.1.16. ...

(iii) $c_n = (-1)^n$ ist beschränkt, denn

$$|c_n| = |(-1)^n| = 1$$

(iv) $d_n = \sin(n)$ ist beschränkt, denn wir haben bereits gesehen, dass $|\sin(n)| \leq 1$ gilt, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 6.1.17 (Nullfolge · beschränkt = Nullfolge)**.** *Sei a_n ein beschränkte Folge und b_n eine Nullfolge (d.h. eine konvergente Folge mit Grenzwert 0). Dann ist die Folge $a_n \cdot b_n$ eine Nullfolge.*

Beweis:

Einschub 6.1.18. ... zu zeigen ist: $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

Vor 1 a_n beschränkt, d.h. es gibt $K>0$, so dass $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Vor 2 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, d.h. zu jedem $\varepsilon' > 0$ gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq N'$ gilt: $|b_n - 0| < \varepsilon'$.

zu zeigen zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n \cdot b_n - 0| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{K}$. Sei $N := N'$. (N' zu ε' aus Vor 2)

Dann gilt: $|a_n \cdot b_n| = \underbrace{\underbrace{|a_n|}\cdot|b_n| \leq \underbrace{K}}_{\leq \text{(Vor1)}} \cdot \underbrace{\underbrace{|b_n|} \stackrel{\text{Vor2}}{<} K\cdot\varepsilon'}_{\leq \text{(Vor2)}} = (*)$

(für $n \geq N' = N$)) $(*) = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$ □

Beispiele 6.1.19. Die Folge

$$c_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

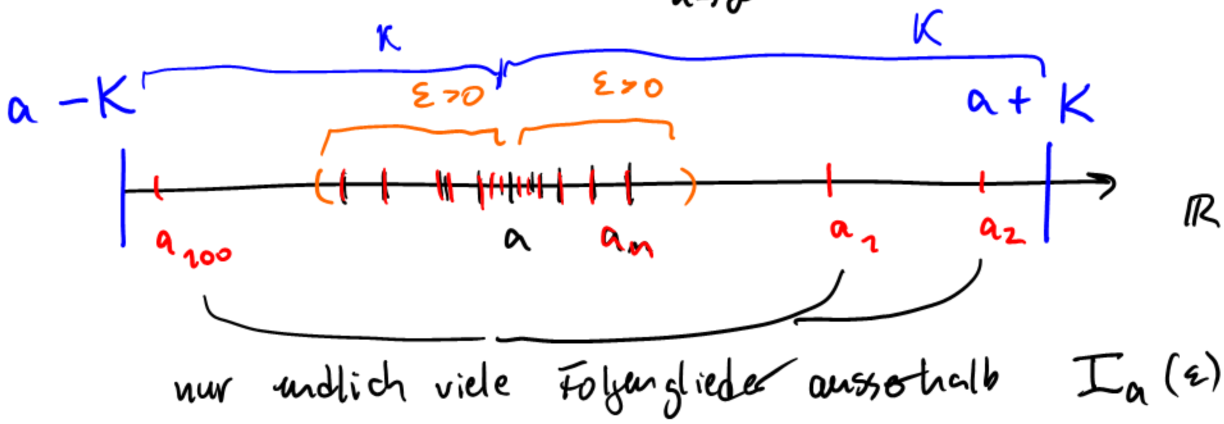
konvergiert gegen 0, denn

$$c_n = \frac{\sin(n)}{n} = \underbrace{\sin(n)}_{=a_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{=b_n}$$

Wegen $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ ist $\sin(n)$ beschränkt, $\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge, daher folgt nach Satz 6.1.17, dass c_n eine Nullfolge ist.

Satz 6.1.20 (Jede konvergente Folge ist beschränkt)**.** *Sei a_n ein konvergente Folge. Dann ist die Folge a_n beschränkt.*

Einschub 6.1.21. ... Idee es gelte: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$



Beweis: Sei a_n ein konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$. Nehmen wir $\varepsilon = 1$. Dann wissen wir (wegen Konvergenz), dass ein $N \in \mathbb{N}$ eixstiert mit

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| \leq 1.$$

Wir setzen

$$K := \max(|a_1 - a|, |a_2 - a|, |a_3 - a|, ..., |a_N - a|, 1)$$

dann gilt

$$|a_n - a| \leq K \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit folgt, dass

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq K} + |a| \leq K + |a|$$

Somit ist die Folge a_n beschränkt durch $K + |a|$. □

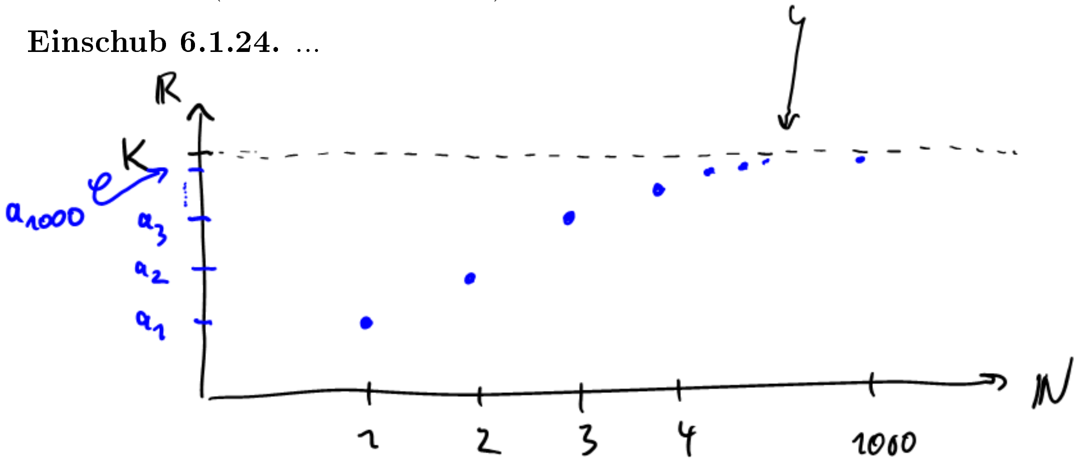
Beispiele 6.1.22. Die Folge $a_n = \frac{n^2+4n}{2n^2+1}$ aus Beispiel 6.1.12 ist konvergent und somit beschränkt.

z.B: Wurzeln

Grenzwerte von Folgen sind oft interessant, da dadurch neue Objekte (wie irrationale Zahlen) beschrieben werden können. Dabei spielt die Vollständigkeit der reellen Zahlen eine entscheidende Rolle. Ein wichtiger Satz in diesem Zusammenhang ist:

Satz 6.1.23 (Monotoniekriterium). *Monotone und beschränkte Folgen sind konvergent.*

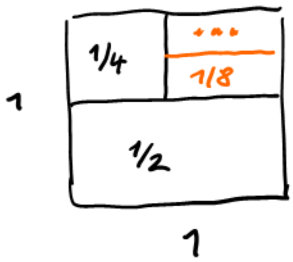
Einschub 6.1.24. ...



6.2 Reihen

Summen mit unendlich vielen Summanden gibt es nicht, aber man kann Grenzwerte von Summen mit endlich vielen Summanden betrachten.

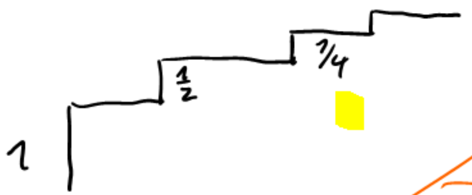
Einschub 6.2.1. ... Beispiel 1) Quadrat



also: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \overbrace{\cdots\cdots}^{??} = 1$

ab hier immer wieder halbieren und summieren $\hat{=}$ unendlich viele Summanden

2) Treppe



$\underset{a_1}{1} + \underset{a_2}{\frac{1}{2}} + \underset{a_3}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots = 2$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{!?}{=}$

Definition 6.2.2. Sei a_n eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$s_3 := a_1 + a_2 + a_3$
$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

die *n-te Partialsumme* der **Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Die Reihe heißt konvergent, wenn die Folge s_n der Partialsummen konvergiert und man schreibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Satz 6.2.3 (Geometrische Reihe). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt für alle $x \neq 1$:*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

geometrische Summe

und damit im Limes für $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \overset{\text{„}n\to\infty\text{“}}{=} \frac{1}{1-x}.$$

Im obigen Bsp (Treppe)

$$x = \tfrac{1}{2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Beweis
Die Summenformel beweist man formal mit vollständiger Induktion oder intuitiver mit der folgenden Rechnung:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) \cdot (1-x) = (1+x+x^2+\dots+x^n)(1-x) = (1+\underbrace{x+\dots+x^n}_{=0}) - (\underbrace{x+x^2+\dots+x^n}_{=0}+x^{n+1}) = 1-x^{n+1}.$$

Ist $|x| < 1$, so konvergiert x^n gegen 0 (geometrische Folge) und somit folgt aus der Summenformel mit den Grenzwertsätzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \underset{\text{Dfn.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \underset{\text{geom. Summe}}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$ geometrische Folge

□

6.3 Anwendungen

6.3.1 Unendliche Dezimalbrüche

Betrachte den unendlichen Dezimalbruch

$$a_0, a_1a_2a_3\ldots = a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k},$$

wobei $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Dann ist die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k}$$

offensichtlich monoton wachsend, denn

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k} \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k} + \underbrace{a_{n+1} 10^{-(n+1)}}_{\geq 0} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k 10^{-k} = s_{n+1}$$

und ferner nach oben beschränkt, denn:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \overbrace{a_k \cdot 10^{-k} \leq a_0 + \sum_{k=1}^{n} 9}^{\leq} \cdot 10^{-k} = a_0 + 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n}\right)$$

$$= a_0 + \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 10^{-k} \quad \left(\tfrac{1}{10} \text{ ausklammern}\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} s_n = a_0 + \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \overset{\boxed{\text{gR}}}{=} a_0 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = a_0 + 1 < \infty$$

Somit ist die Partialsummenfolge eines unendlichen Dezimalbruchs nach dem Monotoniekriterium konvergent und der unendliche Dezimalbruch als Limes dieser Folge wohldefiniert.

Wir betrachten nun $9{,}\overline{9}$. Dieser unendliche Dezimalbruch ist definiert als

$$9{,}\overline{9} = 9 + 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k}$$

Nach der obigen Formel ist dies

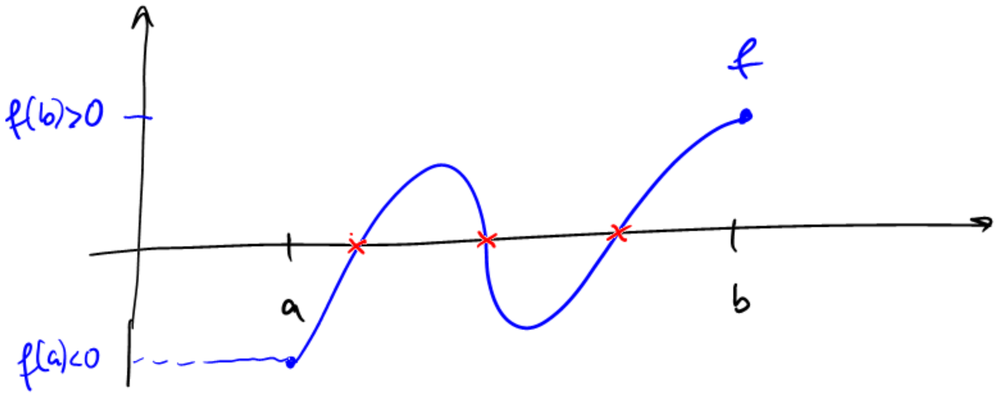
$$= 9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = 9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \overset{\boxed{\text{gR}}}{=} 9 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{\frac{9}{10}} = 10$$

Somit ist $9{,}\overline{9} = 10$.

6.3.2 Approximative Bestimmung von Nullstellen

Gegeben sei eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die *stetig* ist, d.h. für die aus $x_n \to x$ stets $f(x_n) \to f(x)$ folgt[1].

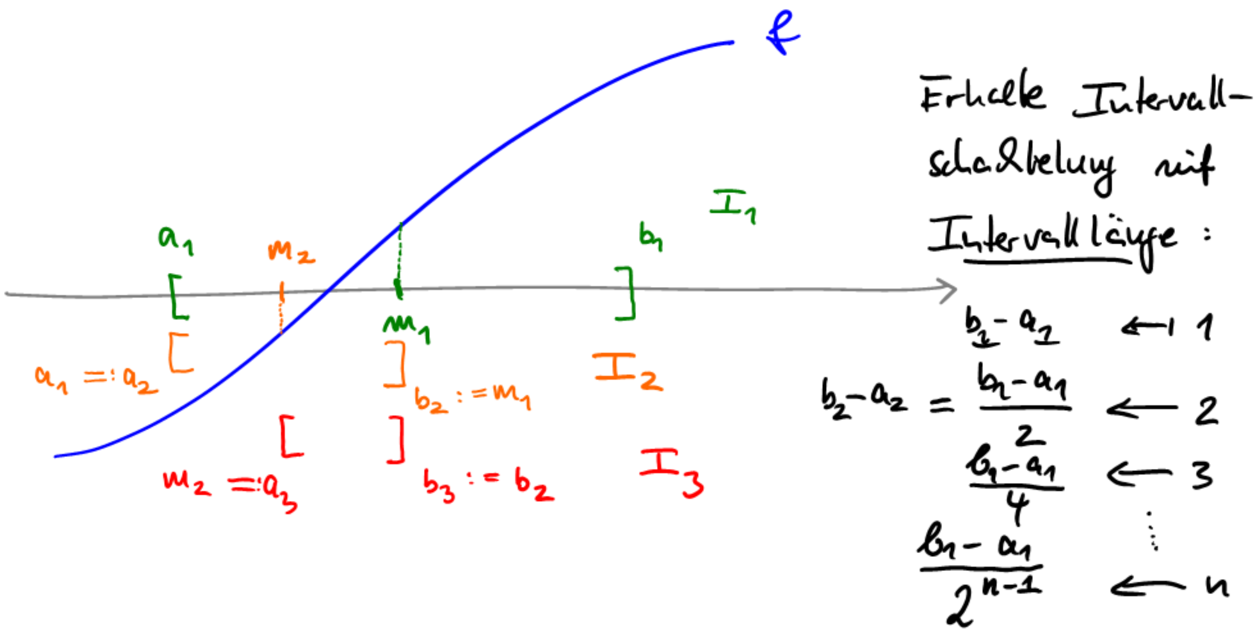
Einschub 6.3.1. ...



Es ist anschaulich klar, dass eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ in dem Intervall (a,b) mindestens eine Nullstelle x_0 haben muss (*Zwischenwerteigenschaft stetiger Funktionen*)[2]. Diese Nullstellen kann man mitunter nicht explizit ausrechnen, aber durch verschiedene numerische Verfahren approximieren:

(i) *Intervallhalbierungsmethode:* Hierbei wird eine Intervallschachtelung $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konstruiert, die die Nullstelle einschließt:

Einschub 6.3.2. ...



Setze $I_1 = [a,b]$ und bestimme $I_k = [a_k, b_k]$ für $k = 2, 3, \dots$, so, dass mit Intervallmittelpunkt $m_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ von I_k gilt:

$$I_{k+1} = \begin{cases} [a_k, m_k], & \text{falls } f(m_k) \geq 0 \\ [m_k, b_k], & \text{falls } f(m_k) < 0. \end{cases}$$

Da die Intervalllänge sich in jedem Schritt halbiert, liegt eine Intervallschachtelung vor. Für die reelle Zahl x_0, die in allen I_k enthalten ist, muss dann $f(x_0) = 0$ gelten Die Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen die gesuchte Nullstelle.

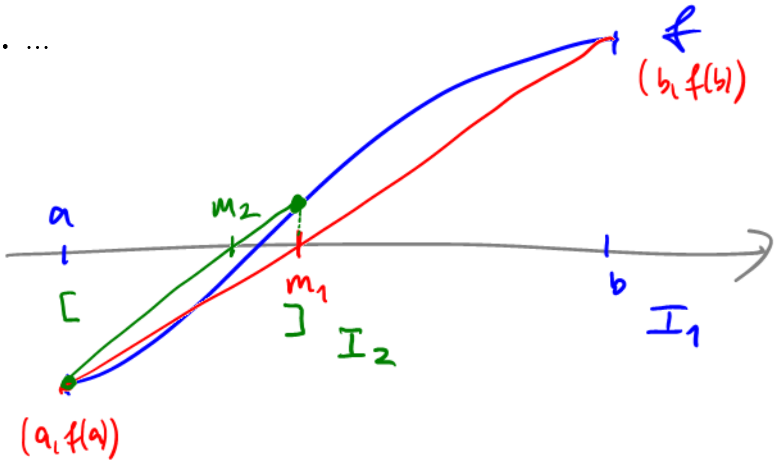
---

[1] Anschaulich bedeutet die Stetigkeit von f auf dem Intervall $[a;b]$, dass man den Graphen von f, ohne den Stift abzusetzen, durchzeichnen kann.

[2] Analog geht es für $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$.

(ii) *Regula falsi:* Bestimme eine Intervallschachtelung $I_k = [a_k, b_k]$ für $k = 1, 2, \ldots$, wie bei der Intervallhalbierungsmethode mit $I_1 = [a, b]$, wähle aber den Unterteilungspunkt m_k nicht als Mittelpunkt des Intervalls I_k, sondern als Nullstelle der Gerade durch die Punkte $P(a_k; f(a_k))$ und $Q(b_k; f(b_k))$:

Einschub 6.3.3. ...



Gemäß der Zwei-Punkte-Form besitzt diese Gerade die Gleichung

$$y = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \cdot (x - a_k) + f(a_k)$$

und damit die Nullstelle

$$m_k = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \cdot f(a_k).$$

6.3.3 Approximation von $\sqrt{a}$

Die Quadratwurzel aus $a > 0$ lässt sich daher z.B. approximieren, indem man mit den Methoden aus 6.3.2. die Lösung der Gleichung

$$x^2 - a = 0 \qquad f(x) = x^2 - a$$

approximativ bestimmt. Verwendet man die Intervallhalbierungsmethode, so bedeutet dies, dass man die $I_k = [a_k, b_k]$ für $k = 1, 2, \ldots$, so bestimmt, dass mit Intervallmittelpunkt $m_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ von I_k gilt:

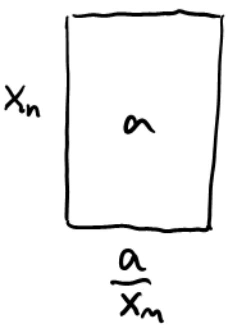
$$a_1^2 \le a \le b_1^2 \qquad \text{und} \qquad I_{k+1} = \begin{cases} [a_k, m_k], & \text{falls } m_k^2 \ge a \iff f(m_k) \ge 0 \\ [m_k, b_k], & \text{falls } m_k^2 < a. \iff f(m_k) < 0 \end{cases}$$

$f(a_1) \le 0 \le f(b_1)$

Alternativ kann man eine Intervallschachtelung zur Approximation von $\sqrt{a}$ konstruieren, indem man in jedem Schritt die nächste Nachkommastelle in der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{a}$ bestimmt. Beide Verfahren sind eher langsam, da sich bei jedem Schritt die Zahl der gültigen Stellen um höchstens Eins verbessert (*lineare Konvergenz*).

Numerisch effizienter ist die Approximation mit Hilfe des *Heron-Verfahrens*:

Einschub 6.3.4. ... Heron-Verfahren geometrisch: Rechteck mit Fläche $a > 0$:



$$\left.\begin{array}{l} x_n > \sqrt{a} \\ \frac{a}{x_n} < \sqrt{a} \end{array}\right\} \qquad \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} =: x_{n+1}$$

Mittelwert der Seitenlängen nehmen