Anwendungen der Mathematik

Universität Bielefeld

WS 2025/2026

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

In der Vorlesung befassen wir uns mit

- Modellierung von funktionalen Zusammenhängen, Approximationsprozesse:
  Dies führt auf Fragen aus der *Analysis*.
- Modellierung zufälliger Phänomene:
  Dies führt auf Fragen aus der *Stochastik* (stochastikós: altgriechisch für scharfsinnig im Vermuten), der Lehre von den Gesetzmäßigkeiten des Zufalls.

1.1 Zahlen

Beispiele für Zahlenmengen:

- Natürliche Zahlen: 1, 2, 3, ...; Notation als Menge: $\mathbb{N}$
  Die natürlichen Zahlen sind durch die sogenannten *PEANO-Axiome* festgelegt.
- Ganze Zahlen: 0, 1, -1, 2, -2, ...; Notation als Menge: $\mathbb{Z}$
  Die ganzen Zahlen erweitern die natürlichen Zahlen, so dass man Differenzen bilden kann.
- Rationale Zahlen, z.B. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{7}, ...$; Notation als Menge: $\mathbb{Q}$
  Die rationalen Zahlen erweitern die ganzen Zahlen, so dass man (außer durch 0) dividieren kann.
- Reelle Zahlen: rationale Zahlen und solche Zahlen wie $\sqrt{2}, \pi, e, ...$; Notation als Menge: $\mathbb{R}$
  Die reellen Zahlen erweitern die rationalen Zahlen, so dass der „Zahlenstrahl keine Lücken mehr aufweist". Wenn man mit reellen Zahlen rechnet, so rechnet man symbolisch (d.h. mit dem Symbol $\sqrt{2}$) oder man approximiert die reelle Zahl durch rationale Zahlen (z.B. $\sqrt{2} \approx 1,41$) und rechnet näherungsweise mit dieser Zahl. Man erhält solche Näherungen z.B. aus der Dezimalbruchdarstellung, die reelle Zahlen besitzen. (Mehr Details zu Eigenschaften reeller Zahlen finden sich im Kapitel 2).

Der Aufbau des Zahlensystems von $\mathbb{N}$ bis $\mathbb{Q}$ wird ausführlich in der Veranstaltung Arithmetik und Algebra behandelt. Ergänzende Hinweise zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ erfolgen hier in späteren Kapiteln.

Messwerte. Messwerte sind Maßzahlen mit Maßeinheiten, z.B. 4 kg, 2,7 m usw.. Maßzahlen sind meist reelle Zahlen. Die Maßeinheit gibt die Dimension (oder den Größenwert)an. Konvention: Beim Rechnen rechnen wir nur mit den Maßzahlen und führen die Einheit am Ende in Klammern, z.B. $2 + 3 = 5$ [kg].

Variablen. Variablen sind Platzhalter für Zahlen oder andere Objekte, die man für die Variablen einsetzen kann. Typischerweise notiert man Variablen mit kleinen oder großen Buchstaben, z.B. x, y, z, A, B, C,... . Man unterscheidet *unabhängige* Variablen, in die man (ohne Einschränkungen) einfach einsetzen kann, und *abhängige* Variablen, deren Wert von einer anderen Variablen abhängt, z.B. ist y gegeben durch $y = x^2 + 1$ eine abhängige Variable. Mithilfe von abhängigen Variablen lassen sich „Zuordnungen" beschreiben: $x \mapsto y = x^2 + 1$.
Treten viele Variablen auf, so notieren wir sie mit Indizes, z.B. $x_1, x_2, x_3, Y_1, Y_2, Y_3$....

Zahlenpaare, Koordinatensystem. Während $\mathbb{R}$ als Zahlenstrahl veranschaulicht wird, werden Zahlenpaare (x, y) mit $x, y \in \mathbb{R}$ in der Koordinatenebene dargestellt, z.B. im *kartesischen Koordinatensystem*, in dem die beiden Koordinatenachsen (Zahlenstrahle für den ersten und den zweiten Wert) senkrecht zueinander stehen oder in einem *affinen Koordinatensystem*, in dem die Achsen in einem Winkel zwischen 0 und 90 Grad zueinander stehen. Die Achsen werden - je nach Zusammenhang - unterschiedlich bezeichnet. Die horizontale Achse heißt häufig x- oder *t-Achse* oder *Abszisse*, die vertikale Achse entsprechend *y-Achse* oder *Ordinate*. Die Einheiten auf den Achsen dürfen unterschiedlich sein.
Als Menge notieren wir Paare reeller Zahlen als sog. *kartesisches Produkt*: $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Die Elemente aus $\mathbb{R}^2$ werden - je nach Zusammenhang - notiert als Punkte $P(2; 4), P(2|4)$ oder als 2-Tupel $\binom{2}{4}, (2, 4)$. Entsprechend definiert man *Zahlentripel* und *n-Tupel* durch $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ oder allgemeiner $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} := \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Aussagenlogik

1.2.1 Aussagen

Genau zu definieren, was eine mathematische Aussage ist, ist überraschend schwierig. Wir wollen möglichst praktisch bleiben und verwenden folgende

Definition 1.2.1. Eine *Aussage* ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist.

Diese Definition ist für unsere Zwecke ausreichend. Hier sind einige

Beispiele 1.2.2.

1 „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“

2 „Alle Katzen sind grau.“

3 „$0 = 1$ “

Nicht jeder Satz ist eine Aussage, hier einige

Beispiele 1.2.3.

1 „Öffne das Fenster!“

2 „Diese Aussage ist falsch.“

3 „n ist eine ungerade Zahl. “

Einschub 1.2.4. ...

Definition 1.2.5. Die *Negation* einer Aussage A ist diejenige Aussage, die falsch ist, wenn A wahr ist - und umgekehrt.

Die Negation einer Aussage A bezeichnet man mit $\text{Nicht}(A)$ oder formaler mit $\neg A$.

Beispiele 1.2.6.

1 $\neg$(„Alle Katzen sind grau“) bedeutet „Es gibt eine Katze, die nicht grau ist.“

2 $\neg$(„$0 = 1$“) bedeutet „$0 \neq 1$“

1.2.2 UND, ODER

Aussagen kann man zu neuen Aussagen verknüpfen. Der Wahrheitswert der neuen Aussage ist abhängig von der Verknüpfung. Wir betrachten ein Gnu sowie die Aussagen

$$\begin{aligned} F &= \text{Das Gnu ist ein Fisch,} \\ S &= \text{Das Gnu ist kein Säugetier,} \\ W &= \text{Das Gnu lebt ausschließlich im Wasser.} \\ V &= \text{Das Gnu ist ein Vogel.} \end{aligned}$$

Die Aussage „F und ¬ V“ ist falsch. Die Aussage „W oder ¬ S“ ist wahr.
Die Wahrheitswerte von mit und/oder verknüpften Aussagen werden durch Wahrheitstabellen festgelegt.

Einschub 1.2.7. ...

Die Negationen von „und “ und „oder “ sind durch elegante Symmetrie miteinander verbunden.

$$\begin{array}{lll} \neg(A \wedge B) & \text{hat den gleichen Wahrheitswert wie} & \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) & \text{hat den gleichen Wahrheitswert wie} & \neg A \wedge \neg B \end{array}$$

Einschub 1.2.8. ...

1.2.3 Implikation

Die meisten mathematischen Aussagen sind von der Form

„Wenn Aussage A wahr ist, dann ist Aussage B wahr.“

Man sagt dann „A impliziert B “oder „Aus A folgt B“. Man notiert $A \Rightarrow B$.
Derartige Wenn/Dann Verknüpfungen können allerdings selbst wahr oder falsch sein. Außerdem gilt: aus dem Wahrheitswert der Implikation lassen sich keine Rückschlüsse auf den Wahrheitswert der beteiligten Aussagen ziehen.

Beispiele 1.2.9.

1 „Wenn ich Winston Churchill bin, dann bin ich Engländer. “

2 „Wenn ich Engländer bin, dann bin ich Winston Churchill. “

3 Wenn x gerade ist, dann ist x^2 gerade.

4 Die Summe zweier geraden Zahlen ist gerade.

Einschub 1.2.10. ...

Bevor wir die Wahrheitstabelle der Implikation definieren betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiele 1.2.11. Die Aussage $1 = -1$ ist für die ganzen Zahlen $1, -1 \in \mathbb{Z}$ falsch. Allerdings können wir beide Seiten der Gleichung quadrieren und erhalten die wahre Aussage $1 = 1$. Daher ist die Implikation

$$1 = -1 \;\Rightarrow\; 1 = 1$$

wahr. Hier ein weiteres Beispiel:

Einschub 1.2.12. ...

Es folgt nun die Wahrheitstabelle für die Implikation.

Einschub 1.2.13. ...

Definition 1.2.14. Zwei Aussagen A und B heißen *äquivalent*, wenn sowohl $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ wahr sind. Man schreibt dann $A \Leftrightarrow B$.

Beispiele 1.2.15.

1 „$x > 5 \;\Leftrightarrow\; -x < -5$“ ist wahr.

2 „Die Straße ist nass. $\Leftrightarrow$ Es regnet.“ ist falsch

3 $x^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; x = 3$ ist falsch.

Einschub 1.2.16. ...

1.3 Mengen

Viele mathematische Sachverhalte werden ‚mengentheoretisch' formuliert. In diesem Sinne ist die Mengenlehre so etwas wie die Sprache der Mathematik.

Naives Verständnis von Mengen:
Unter einer *Menge* versteht man eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
Die Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Wohlbestimmt bedeutet, dass eindeutig feststellbar ist, ob ein Objekt x zu einer Menge M gehört, wir schreiben dann

$$x \in M,$$

oder nicht, wir schreiben dann

$$x \notin M.$$

Wohlunterschieden bedeutet, dass kein Element mehrfach zu einer Menge gehört.

Eine Menge A heißt *(echte) Teilmenge* von M falls jedes Element von A auch ein Element in M ist (bzw. und zusätzlich $A \neq M$ ist). Man notiert $A \subset M$. Man kann Mengen *explizit*, indem man eine Liste aller Elemente angibt, oder *implizit* beschreiben, indem man die Menge als die Teilmenge einer anderen Menge angibt, in der alle Elemente mit einer gewissen Eigenschaft zusammengefasst sind.

Beispiel 1.3.1.

a) Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung $x^2 - 1 = 0$ ist implizit beschrieben durch

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}$$

und explizit durch $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$.

b) *Intervalle* sind Teilmengen der reellen Zahlen

- *abgeschlossenes* Intervall von a bis b:

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

- *halboffene* Intervalle von a bis b:

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad [a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

- *offenes* Intervall von a bis b:

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Die Zahlen a und b heißen *Eckpunkte* des Intervalls. a oder b können auch gleich $\pm\infty$ sein.

c) Die *leere Menge* $\emptyset := \{\}$ ist die Menge ohne Elemente und kann z.B. wie folgt angegeben werden: $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ und } x > 1\}$

Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten: $A = B$ genau dann, wenn $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ also genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subset A$ gilt. Dies kann man zum Beispiel durch vollständige Fallunterscheidung beweisen.

Mengentheoretische Operationen (Teil 1)
Seien A, B Teilmengen von M.

Schnittmenge (Durchschnitt) von A und B:

$$A \cap B := \{x \in M \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Vereinigung(smenge) von A und B:

$$A \cup B := \{x \in M \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

(Mengen-)Differenz von A und B (auch *Komplement von B in A*):

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Ist $A = M$, so heißt $B^C := M \setminus B$ *Komplement von B*.

Einschub 1.3.2. ...

Die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Teilmengen von M heißt *Potenzmenge von M*.

Einschub 1.3.3. ...

(Kartesisches) Produkt von A und B:

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Das ist ist also die Menge aller geordneten Paare bestehend aus Elementen von A (erster Eintrag) und Elementen von B (zweiter Eintrag).

Einschub 1.3.4. ...

Außerdem gibt es **Rechengesetze für Mengen:**

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Einschub 1.3.5. ...

1.4 Relationen, Abbildungen, Funktionen

Definition 1.4.1 (Relation)**.** Seien A und B Mengen. Eine *Relation zwischen A und B* ist eine Teilmenge $R \subset A \times B$. Ist ein Paar (a,b) Element von R, so sagt man dann, dass a in Relation R zu b steht. Wir schreiben in diesem Fall: aRb.

Einschub 1.4.2. ...

Beispiel 1.4.3.

- Kleiner-Gleich-Relation auf $A = B = \mathbb{N}$
- Kleiner-Gleich-Relation auf $A = B = \mathbb{R}$, Gleichheitsrelation, Teilbarkeitsrelation auf $A = B = \mathbb{N}$
- Geraden, Kreise, Parabeln in $\mathbb{R}^2$ (siehe Kapitel 2)

Einschub 1.4.4. ...

Definition 1.4.5 (Umkehrrelation)**.** Ist $R \subset A \times B$ eine Relation von A nach B, so ist durch

$$R^{-1} := \{(b,a) \in B \times A \mid aRb\}$$

eine Relation von B nach A, die sogenannte *Umkehrrelation zu R*, definiert.

Einschub 1.4.6. ...

Im Fall $A = B$ entsteht die Umkehrrelation durch Spiegelung der Relation an der Winkelhalbierenden.

Einschub 1.4.7. ...

1.4.1 Äquivalenzrelationen

Definition 1.4.8. Äquivalenzrelation Eine Relation $\sim$ auf einer Menge A (d.h. zwischen A und A) heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie die folgenden Eigenschaftgen besitzt:

Reflexivität	Für alle $a \in A$ gilt: $a \sim a$
Symmetrie	Für alle $a, b \in A$ gilt: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
Transitivität	Für alle $a, b, c \in A$ gilt: $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Gilt $a \sim b$, so heißen a und b *äquivalent*.

Bemerkung 1.4.9. Die Äquivalenzrelation $\sim$ zerlegt die Grundmenge A in Teilmengen von A, die sogenannten *Äquivalenzklassen*, so dass jedes Element von A in genau einer der Äquivalenzklassen liegt. Die Äquivalenzklassen sind paarweise *disjunkt* (haben paarweise eine leere Schnittmenge) und ergeben als Vereinigung ganz A. Die Äquivalenzklasse von $a \in A$ notieren wir als

$$[a] := \{b \in A \,|\, b \sim a\}.$$

Beispiele 1.4.10. Sei $m \in \mathbb{N}, m > 1$. Auf $A = B = \mathbb{Z}$ definiert

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \text{ ist durch } m \text{ teilbar}$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind die *Restklassen modulo m*.

Einschub 1.4.11. ...

1.4.2 Ordnungsrelationen

Definition 1.4.12. Eine Relation R auf einer Menge A heißt *Ordnungsrelation* oder *Halbordnung*, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

Reflexivität	Für alle $a \in A$ gilt: aRa
Antisymmetrie	Für alle $a, b \in A$ gilt: aRb und $bRa \Rightarrow a = b$
Transitivität	Für alle $a, b, c \in A$ gilt: aRb und $bRc \Rightarrow aRc$

Eine Halbordnung R ist eine *totale Ordnung*, falls für alle $a, b \in A$ stets aRb oder bRa gilt.

Beispiele 1.4.13. Die Kleiner-Gleich-Relation $\leq$ auf $A = B = \mathbb{R}$ ist eine totale Ordnung. Die Teilmengen-Relation auf $\mathcal{P}(M)$ ist eine Halbordnung, die im Allgemeinen keine totale Ordnung ist.

Einschub 1.4.14. ...

1.4.3 Abbildungen, Funktionen

Abbildungen beziehungsweise Funktionen sind die mathematische Abstraktion eines *funktionalen Zusammenhangs*: Jedem Wert einer *unabhängigen* Größe wird genau ein Wert einer dann abhängigen Größe zugeordnet.

Die Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs kann erfolgen durch die Angabe eines Terms oder (partiell) durch eine Wertetabelle oder (geometrisch) durch Zeichnung des *Graphen* der Zuordnung, also derjenigen Punkte im $\mathbb{R}^2$, deren erste Koordinate die unabhängige Größe x und deren zweite Koordinate die x zugeordnete, abhängige Größe ist.

Beispiele 1.4.15.

a. Der Umfang U eines Kreises ist abhängig von seinem Radius r: $U = 2\pi r$.

b. Der Bremsweg eines Autos hängt von der gefahrenen Geschwindigkeit ab.

c. Die Füllhöhe eines kegelförmigen Glases hängt von der eingefüllten Wassermenge ab.

d. Durch den Ausweis wird einer Person (unabhängige Größe) ihre Körpergröße (abhängige Größe) zu geordnet oder ihre Augenfarbe (anhängige Größe) zugeordnet (das bedeutet die Größen müssen nicht quantifizierbar sein).

e. Durch den Börsenkurs wird Zeitpunkten der Kurswert einer Aktie zugeordnet (also auch bei quantifizierbaren Merkmalen muss der funktionale Zusammenhang nicht durch einen Term ausgedrückt werden können).

Einschub 1.4.16. ...

Definition 1.4.17. Seien A und B Mengen. Eine *Abbildung* von A nach B ist eine Relation $\Gamma \subset A \times B$ zwischen A und B, für die gilt:

a. Jedes Element aus A steht in Relation zu einem Element aus B, das bedeutet formal: zu jedem $a \in A$ existiert ein $b \in B$, so dass $(a, b) \in \Gamma$ gilt.

b. Jedes Element aus A steht in Relation zu höchstens einem Element aus B, das bedeutet formal: aus $(a, b) \in \Gamma$ und $(a, b') \in \Gamma$ folgt $b = b'$.

Die beiden Bedingungen der Definiton lassen sich zu einer zusammenfassen: Jedes Element aus A steht in Relation zu genau einem Element aus B.

Beispiele 1.4.18.

a. Der Graph eines funktionalen Zusammenhangs ist eine Abbildung.

b. Die Zuordnung, die einzelnen Studierenden das Geburtsdatum zuordnet, ist eine Abbildung.

c. Die Teilerrelation auf $\mathbb{N}$ ist keine Abbildung.

Einschub 1.4.19. ...

Notation 1.4.20. Üblicherweise notiert man Abbildungen $\Gamma \subset A \times B$ nicht als Teilmenge, sondern als *Zuordnung*

$$f : A \to B.$$

Man sagt: „f ist eine Abbildung von A nach B" oder kurz „f von A nach B". Die Menge A heißt dann *Definitionsbereich* und B *Wertebereich*.
Statt $(x, y) \in \Gamma$ schreibt man

$$y = f(x).$$

Man nennt $f(x)$ den *Wert*, den die Zuordnung f dem *Argument* (erster Wert) $x \in A$ zuordnet. Man sagt: „ $f(x)$ ist das Bild von x unter f".
Alternativ schreibt man auch

$$f : A \to B, \quad x \mapsto f(x).$$

Beachte der Pfeil $\to$ steht zwischen den Mengen, zwischen denen f abbildet, hingegen steht $\mapsto$ zwischen dem Element x und dem zugeordneten Funktionswert $f(x)$. Den Term „$x \mapsto f(x)$ "nennt man *Zuordnungsvorschrift*.
Die Menge

$$\Gamma = \Gamma(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}$$

nennt man den *Graphen* von f.

Einschub 1.4.21. ...

Sind A und B Teilmengen der reellen Zahlen, so nennt man eine Abbildung $f : A \to B$ eine *Funktion*.

1.4.4 (Graphische) Darstellungen von Funktionen

Die Angabe einer Funktion besteht aus Angabe des Definitions- und Wertebereiches und der Zuordnungsvorschrift. Funktionen können dadurch visualisiert werden, dass man ihren Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem markiert. Mithilfe von Computern (Tabellenkalkulationsprogrammen oder Funktionenplottern) kann man diese Visualisierungen und auch Wertetabellen leicht herstellen.

Einschub 1.4.22. ...

Wenn Definitions- und Wertebereich aus dem Zusammenhang ersichtlich sind, kann man Funktionen auch nur durch ihren *Funktionsterm* zum Beispiel $f(x) = x^2$ oder auch $y = x^2$ definieren.

1.4.5 Funktionen in mehreren Variablen

Eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ordnet jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine reelle Zahl $f(x, y) \in \mathbb{R}$ zu, zum Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2$. Der Graph von f besteht dann aus einer Teilmenge des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$, nämlich:

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

In diesem Fall lässt sich der Graph $\Gamma(f)$ der Funktion f ist als eine „Fläche" im Raum („Gebirge") darstellen.

Einschub 1.4.23. ...

Den Graph von Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann man in einem dreidimensionalen Koordinatensystem (wie oben) perspektivisch darstellen oder durch spezielle zweidimensionale Graphiken, sogenannte *Höhenlinien*:

Die Höhenlinie $H_f(c)$ von f zur Höhe c, sind alle Punkte der Ebene, deren Bild unter f gleich c ist, d.h.

$$H_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x, y) = c\}.$$

Im Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2$ sind die Höhenlinien leer, falls $c < 0$ bzw. der Ursprung, falls $c = 0$ bzw. ein Kreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius $\sqrt{c}$, falls $c > 0$. Die Höhenlinie $H_f(c)$ ist der Schnitt des Graphen von f mit der Ebene im dreidimensionalen Raum, die durch die Gleichung $z = c$ beschrieben wird.

Einschub 1.4.24. ...

1.4.6 Umkehrrelationen von Funktionen

Eine Funktion f ist eindeutig bestimmt durch ihren Graphen $\Gamma(f)$. Die Relation $\Gamma(f)$ besitzt eine *Umkehrrelation*

$$\Gamma(f)^{-1} := \{(f(x), x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Im Allgemeinen ist $\Gamma(f)^{-1}$ aber keine Funktion (wie z.B. für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$). Wenn die Umkehrrelation eine Funktion ist, so erhält man einen Funktionsterm für die Umkehrfunktion durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x.

Definition 1.4.25 (Umkehrfunktion)**.** Es sei $f : A \to B$ eine Funktion. Die *Umkehrfunktion* $f^{-1} : B \to A$ ist diejenige Funktion, welche

a. $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$ und

b. $f(f^{-1}(y)) = x$ für alle $y \in B$

erfüllt.

Einschub 1.4.26. ...

Bemerkung 1.4.27. Nicht jede Funktion f hat eine Umkehrfunktion. Falls es eine gibt, nennt man sie wie in der Definition f^{-1} und sie erfüllt die Bedinungen der Definition. Wenn eine Funktion g die Bedingungen der Definition erfüllt, dann ist sie die Umkehrfunktion von f und man schreibt $g = f^{-1}$.

Beispiele 1.4.28. Der Umfang eines Kreises ist abhängig von dem Radius des Kreises:

$$U : (0, \infty) \to (0, \infty), \quad U(r) := 2\pi r$$

Der Radius eines Kreises ist von dem Umfang des Kreises abhängig:

$$R : (0, \infty) \to (0, \infty), \quad R(u) := \frac{u}{2\pi}.$$

Hier gilt also $U = R^{-1}$ und $R = U^{-1}$.

Einschub 1.4.29. ...

Kapitel 2

Lineare Funktionen

Im Folgenden werden wir besondere Klassen von Funktionen für die Modellierung von funktionalen Zusammenhängen genauer untersuchen:

Definition 2.0.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *linear*, wenn es reelle Zahlen a und b gibt, so dass $f(x) = ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Im Spezialfall $a = 0$ heißt f *konstant*. Ist $b = 0$, so heißt f *proportional* oder *homogen-linear* und a *Proportionalitätsfaktor*.

Bemerkung 2.0.2. Konstante Funktionen beschreiben funktionale Zusammenhänge, in denen eine Veränderung der unabhängigen Größe x keine Veränderung der abhängigen Größe $f(x)$ bewirkt. Daher sind sie an sich eher uninteressant, werden aber zum Beispiel gebraucht, um ein solches Verhalten in Abgrenzung zu anderem Verhalten darzustellen (z.B. Flatrate-Gebühr versus Volumentarif beim Handy, Kosten für eine Dauerkarte für Sportveranstaltungen versus Kosten für einzelne Eintrittskarten).

2.1 Proportionale Funktionen

Satz 2.1.1. *Für eine proportionale Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für alle $r, x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:*

$$f(r \cdot x) = r \cdot f(x) \quad \textit{und} \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Dem Doppelten, Dreifachen, r-fachen des Arguments wird also durch eine proportionale Funktion der doppelte, dreifachen, r-fache Funktionswert zugeordnet. Geometrisch bedeutet diese Eigenschaft, dass die Punkte des Graphen einer proportionalen Funktion auf einer Ursprungsgeraden liegen.

Einschub 2.1.2. ...

Beweisidee: Einsetzen in den Funktionsterm und Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz anwenden.

Folgerung 2.1.3. *Kennt man von einer proportionalen Funktion f den Funktionswert an einer Stelle $x_0 \neq 0$, so kennt man alle Funktionswerte. Es gilt nämlich:*

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot x,$$

Einschub 2.1.4. ...

d.h. $a = \frac{f(x_0)}{x_0}$ *ist der Proportionalitätsfaktor, insbesondere für* $x_0 = 1$ *also* $a = f(1)$.

Obwohl Proportionalität eine der einfachsten funktionalen Zusammenhänge ist, hat sie zahlreiche Anwendungen:

Beispiele 2.1.5.

- Gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigikeit v_0: Sei $s(t)$ die zurückgelegte Strecke nach der Zeit t, dann gilt: $s(t) = v_0 \cdot t$.

  Einschub 2.1.6. ...

- Umrechnungen: Einheiten (Meter in Kilometer, Stunden in Sekunden, usw.), Wechselkurse, Grad in Bogenmaß bei Winkeln (Proportionalitätsfaktor ist hier $\frac{2\pi}{360}$), Maßstäbe bei Landkarten

  Einschub 2.1.7. ...

- Physikalische Gesetze, z.B. Ohmsches Gesetz, Hookesches Gesetz

  Einschub 2.1.8. ...

- Strahlensätze in Geometrie

Einschub 2.1.9. ...

- Dreisatz (hier bestimmt man den Proportionalitätsfaktor häufig über den sogenannten *Schluss über die Eins.*)

2.2 Allgemeine lineare Funktionen

Die allgemeine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ ergibt sich aus der zugehörigen proportionalen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$ durch Addition der Konstanten b, d.h. geometrisch, dass der Graph von f die um b Einheiten in y-Achsenrichtung verschobene Ursprungsgerade ist, die durch den Graphen von g gegeben ist. Man sagt, dass der Graph von f eine Gerade mit *Steigung* a und *y-Achsenabschnitt* b ist. Der Graph von f wird auch kurz mit der *Geradengleichung* $y = ax + b$ beschrieben.

Einschub 2.2.1. ...

Die wesentliche Eigenschaft von linearen Funktionen ist, dass für das *Steigungsdreieck* gilt:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a,$$

Einschub 2.2.2. ...

d.h. unabhängig von der Wahl der Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ ergibt der Quotient $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, der die Änderung der Funktionswerte („Änderung in vertikaler Richtung") ins Verhältnis zu der Änderung der Argumente („Änderung in horizontaler Richtung") setzt, die Steigung a der linearen Funktion f (bzw. der Geraden zu $y = ax + b$). Geometrisch bedeutet dies, dass verschiedene Steigungsdreiecke an den Graphen von f ähnlich sind, d.h. dass sie insbesondere dieselben Winkel besitzen.

Einschub 2.2.3. ...

Für den Winkel α der Geraden gegenüber der Parallelen zur x-Achse gilt in jedem Steigungsdreieck

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \arctan a.$$ [1]

2.3 Geradengleichungen zu linearen Funktionen mit gewünschten Eigenschaften

- Gerade mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b:

$$y = ax + b$$

- Gerade mit Steiung a durch den Punkt (x_0, y_0):

$$y = a(x - x_0) + y_0 = ax + (y_0 - ax_0) \qquad \text{(Punkt-Steigungs-Form)}$$

Einschub 2.3.1. ...

[1] Für den Tangens eines Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Länge der Gegenkathete}}{\text{Länge der Ankathete}}.$$

Mit arctan wird die Umkehrfunktion der Tangensfunktion bezeichnet.

- Gerade durch zwei Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1) + y_1 & \text{(Zwei-Punkte-Form)} \end{aligned}$$

  Einschub 2.3.2. ...

2.4 Anwendung: Lineare Interpolation

Gegeben eine (beliebige) Funktion $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, deren Werte an den Randstellen x_1 und x_2 bekannt sind (und deren sonstige Werte nicht oder nur mit großem Aufwand bestimmt werden können).

Einschub 2.4.1. ...

Zur Bestimmung von Näherungswerten für die Funktionswerte von f auf (x_1, x_2) wird der Graph von f durch eine Gerade g ersetzt, die an den Randstellen von $[x_1, x_2]$ mit f übereinstimmt, d.h. gesucht ist $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ linear mit $g(x_1) = f(x_1)$ und $g(x_2) = f(x_2)$. Die Zwei-Punkte-Form liefert

$$g(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Für hinreichend „gutartige” Funktionen f gilt dann $f(x) \approx g(x)$ für $x \in [x_1, x_2]$.

2.5 Nullstellen

Definition 2.5.1. Eine Stelle x_0 in der Definitionsmenge einer Funktion f heißt *Nullstelle* von f, falls $f(x_0) = 0$ gilt.

Einschub 2.5.2. ...

Bei linearen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b$$

unterscheiden wir die Fälle:

1. Fall: $a = 0$:
Die konstante Funktion f mit $f(x) = b$ besitzt keine Nullstelle, wenn $b \neq 0$. Falls $b = 0$, also f die *Nullfunktion* ist, ist jede Stelle der Definitionsmenge eine Nullstelle.

2. Fall: $a \neq 0$:
Für eine Nullstelle x_0 von f gilt:

$$ax_0 + b = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{a},$$

d.h. es gibt genau eine Nullstelle $x_0 - \frac{b}{a}$ von f .

Einschub 2.5.3. ...

2.6 Umkehrfunktion

Es sei f eine lineare Funktion. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

1. Fall: $a = 0$:
Der Graph der konstanten Funktion f mit $f(x) = b$ ist eine Parallele zur x-Achse. Der Graph der Umkehrelation entsteht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden, ist daher eine Gerade parallel zur y-Achse und somit keine Funktion. Folglich besitzt f in diesem Fall keine Umkehrfunktion.

2. Fall: $a \neq 0$:
Löst man die Geradengleichung $y = ax + b$ nach x auf, so erhält man

$$x = \frac{y - b}{a} = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}.$$

Die Umkehrrelation von f ist also eine Funktion, nämlich die lineare Funktion

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}.$$

Einschub 2.6.1. ...

2.7 Monotonie

Definition 2.7.1 (Monotonie)**.** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*), falls

$$\text{für alle} \quad x_1 < x_2 \quad \text{gilt:} \quad f(x_1) < f(x_2) \qquad (\text{bzw.} \quad f(x_1) > f(x_2)).$$

Sie heißt *monoton wachsend* (bzw. *fallend*), falls

$$\text{für alle} \quad x_1 < x_2 \quad \text{gilt:} \quad f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (\text{bzw.} \quad f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Einschub 2.7.2. ...

Folgerung 2.7.3. *Für eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ gilt:*

$$\begin{aligned} a > 0 \quad &\Rightarrow \quad f \textit{ ist streng monoton wachsend} \\ a < 0 \quad &\Rightarrow \quad f \textit{ ist streng monoton fallend} \end{aligned}$$

Einschub 2.7.4. ...

2.8 Gemeinsame Punkte von Geraden.

Seien f und g lineare Funktionen mit $f(x) = ax + b$ und $g(x) = a'x + b'$. Zur Bestimmung gemeinsamer Punkte der zugehörigen Graphen suchen wir alle Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = g(x_0)$. Dazu suchen wir Nullstellen der Funktion $h := f - g$, d.h. der Funktion mit $h(x) = f(x) - g(x)$, denn es gilt $f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow (f - g)(x_0) = 0$.

Einschub 2.8.1. ...

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $h = f - g$ ist die Nullfunktion, d.h. f=g:
Die beiden Geraden stimmen überein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = a'$ und $b = b'$.

Einschub 2.8.2. ...

2. Fall: $h = f - g$ ist konstant, aber nicht die Nullfunktion:
In diesem Fall exisitiert ein $c \neq 0$ mit $h(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h.$f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = a'$ und $b \neq b'$. Hier gibt es keinen Schnittpunkt, da $f - g$ als konstante Funktion ungleich Null keine Nullstelle hat. Die zugehörigen Geraden sind also parallel.

Einschub 2.8.3. ...

3. Fall: $h = f - g$ ist nicht konstant:
Da $f - g$ offensichtlich wieder eine lineare Funktion ist (mit $h(x) = (a - a')x + (b - b')$), gibt es dann genau eine Nullstelle x_0 von $h = f - g$, d.h. genau einen Schnittpunkt von f und g, nämlich

$$(x_0, f(x_0)) = (x_0, g(x_0)) = \left(-\frac{b - b'}{a - a'}, -\frac{b - b'}{a - a'}a + b\right).$$

Einschub 2.8.4. ...

Anwendungsbeispiel
Die Städte Bielefeld und Hannover sind ca. 100 km voneinander entfernt. Ein IC fährt von Hannover nach Berlin mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 km/h. Gleichzeitig startet in Bielefeld ein ICE, der über Hannover nach Berlin mit einer einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 130 km/h fährt. Offensichtlich holt der ICE den IC irgendwann ein. Den Zeitpunkt t_0 und den Ort s_0 (angegeben als Entfernung von Bielefeld) des Einholens bestimmt man wie folgt: Für die Weg-Zeit-Gesetze s_{IC} und s_{ICE} der beiden Züge gilt: $s_{\text{IC}}(t) = 80t + 100$ und $s_{\text{ICE}}(t) = 130t$. Entsprechend ist t_0 gegeben durch $s_{\text{IC}}(t_0) = s_{\text{ICE}}(t_0)$, d.h. $t_0 = 2$ und somit $s_0 = s_{\text{ICE}}(t_0) = 260$.

Einschub 2.8.5. ...

2.9 Stückweise lineare Funktionen

Eine Funktion f kann *abschnittsweise* definiert sein. In diesem Fall gibt es eine Zerlegung des Definitionsbereichs in paarweise disjunkte Teilmengen $I_1, I_2, ...$ (d.h. $I_m \cap I_n = \emptyset$, falls $m \neq n$) und Funktionen $f_n : I_n \to \mathbb{R}, n \geq 1$ mit

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{falls } x \in I_1, \\ f_2(x), & \text{falls } x \in I_2, \\ f_3(x), & \text{falls } x \in I_3, \\ & \vdots \end{cases}$$

Einschub 2.9.1. ...

Sind für $n \geq 1$ die Zerlegungsmengen I_n Intervalle und die Funktionen $f_n : I_n \to \mathbb{R}$ linear (bzw. konstant), so heißt f *stückweise linear* (bzw. *stückweise konstant*). Stückweise konstante Funktionen heißen auch *Treppenfunktionen*. Stückweise lineare (bzw. konstante) Funktionen kommen bei der Modellierung von funktionalen Zusammenhängen häufiger vor, z.B. bei der Beschreibung von Mietverträgen mit Grundgebühr und Freikilometern oder von Telefongebühren bei Abrechnung je angefangener Minute.
Weitere Beispiele für stückweise lineare Funktionen sind die *Betragsfunktion*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

Einschub 2.9.2. ...

und die *Vorzeichenfunktion*

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Einschub 2.9.3. ...

2.10 Lineares Skalieren

Verschieben, Vergrößern oder Verkleinern des Graphen einer Funktion f in x- oder y-Achsenrichtung bewirken zwar quantitative Veränderungen, qualitative Eigenschafen des Graphen bleiben im Wesentlichen aber erhalten. D.h. bei der Modellierung von funktionalen Zusammenhängen können diese Manipulationen des Graphen zur Anpassung an die Anwendungssituation genutzt werden, ohne dass die qualitativen Eigenschaften des gewählten, beschreibenden Funktiontyps verloren gehen. Die genannten Modifikationen erhält man durch *lineares Skalieren* und zwar in der folgenden Weise:

Vertikales Verschieben. Die

$$\text{Ersetzung von } f(x) \text{ durch } f(x)+b$$

für eine Konstante b bewirkt eine Verschiebung des Graphen von f um b Einheiten, und zwar nach oben (in y-Richtung), falls $b > 0$ und nach unten, falls $b < 0$ ist.

Einschub 2.10.1. ...

Horizontales Verschieben. Die

$$\text{Ersetzung von } f(x) \text{ durch } f(x-d) \text{ für eine Konstante } d$$

bewirkt eine Verschiebung des Graphen von f um d Einheiten, und zwar nach rechts (in x-Richtung), falls $d > 0$ und nach links, falls $d < 0$ ist.

Einschub 2.10.2. ...

Vertikales Strecken oder Stauchen (Änderung der Amplitude). Die

$$\text{Ersetzung von } f(x) \text{ durch } a \cdot f(x)$$

für eine Konstante $a \neq 0$ bewirkt eine Streckung des Graphen in y-Richtung, falls $a > 1$, eine Stauchung des Graphen in y-Richtung, falls $0 < a < 1$ und, falls $a < 0$, eine Streckung oder Stauchung in y-Richtung um den Faktor $|a|$ bei gleichzeitiger Spiegelung des Graphen an der x-Achse.

Einschub 2.10.3. ...

Horizontales Strecken oder Stauchen (Änderung der Frequenz). Die

$$\text{Ersetzung von } f(x) \text{ durch } f(c \cdot x)$$

für eine Konstante $c \neq 0$ bewirkt eine Stauchung des Graphen in x-Richtung, falls $c > 1$, eine Streckung des Graphen in x-Richtung, falls $0 < c < 1$ und, falls $c < 0$, eine Streckung oder Stauchung in x-Richtung um den Faktor $|c|$ bei gleichzeitiger Spiegelung des Graphen an der y-Achse.

Einschub 2.10.4. ...

Bei der Normalparabel, dem Graphen zu $x \mapsto x^2$, bewirkt die horizontale Streckung oder Stauchung um $c > 0$ denselben Effekt wie das vertikale Strecken oder Stauchen um den Faktor c^2. Daher kann man die Unterschiede der Amplituden- und Frequenzänderung bei dieser Funktion nicht gut studieren. Hier sind periodische Funktionen, wie z.B. die Sinusfunktion, besser geeignet.

Einschub 2.10.5. ...

Diese vier Operationen lassen sich zu einer allgemeinen linearen Umskalierung zusammenfassen. So bewirkt die Ersetzung von

$$f(x) \qquad \text{durch} \qquad a \cdot f\left(c \cdot (x - d)\right) + b$$

- eine Streckung oder Stauchung des Graphen von f in x-Richtung um den Faktor c
- eine Streckung oder Stauchung des Graphen von f in y-Richtung um den Faktor a
- eine Verschiebung des Graphen um d Einheiten in x-Richtung und b Einheiten in y-Richtung.

Es ist hierbei zu beachten, dass die Reihenfolge der vorgenommenen Operationen wesentlich ist, d.h. vertauscht man die Rihenfolge der Manipulationen, so kann das zu unterschiedlichen Funktionen führen, wie z.B. beim Vertauschen von Verschieben und Strecken/Stauchen.

Einschub 2.10.6. ...

Beispiele 2.10.7. Betrachte die Funktion $f(x) = x^2$ und die folgenden Manipulationen des Funktionsgraphen:

1. Verschiebung um 3 Einheiten in x-Richtung
2. Verschiebung um 4 Einheiten entgegen der y-Richtung
3. Vertikale Streckung um den Faktor 2 und Spiegelung an der x-Achse

Führt man die Manipulationen in der Reihenfolge 1 - 2 - 3 durch, so erhält man die Funktion g_1 mit

$$g_1(x) = -2((x-3)^2 - 4) = -2x^2 + 12x - 10.$$

Führt man die Manipulationen in der Reihenfolge 3 - 2 - 1 durch, so erhält man die Funktion g_2 mit

$$g_2(x) = -2(x-3)^2 - 4 = -2x^2 + 12x - 22 \neq g_1(x).$$

Kapitel 3

Quadratische Funktionen

Definition 3.0.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *quadratische Funktion*, wenn es reelle Zahlen a, b und c gibt mit $a \neq 0$, so dass gilt:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 3.0.2. Im Spezialfall $a = 1, b = c = 0$ erhält man $f(x) = x^2$. Der zugehörige Graph zu dieser Funktion heißt *Normalparabel*. Der Punkt $(0, 0)$ ist der *Scheitelpunkt* der Normalparabel.
Mit quadratischer Ergänzung zeigt man, dass

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)$$

gilt.

Einschub 3.0.3. ...

Einschub 3.0.4. ...

Der Graph der allgemeinen quadratischen Funktion geht also aus der Normalparabel durch lineares Skalieren hervor, nämlich durch

- Streckung der Normalparabel in y-Richtung um den Faktor a und
- Verschiebung der gestreckten Parabel in horizontaler Richtung um $-\frac{b}{2a}$ und
- in vertikaler Richtung um $-\frac{b^2}{4a} + c$.

Die Darstellung der Funktion wie auf der rechten Seite der obigen Gleichung, also in der Form

$$f(x) = a(x-d)^2 + e$$

heißt *Scheitelpunktsform*. An der Scheitelpunktsform von f kann man Gestalt und Lage des Graphen zu f sofort ablesen: Es handelt sich um eine um den Faktor a gestreckte Normalparabel, deren Scheitelpunkt in den Punkt (d, e) verschoben wurde.

Einschub 3.0.5. ...

3.1 Nullstellen

Die Suche nach **Nullstellen** quadratischer Funktionen führt sofort auf *quadratische Gleichungen*, also Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

(Eine allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c' = d$ lässt sich durch Subtraktion von d in die Form $ax^2 + bx + c = 0$ überführen.)
Zur Lösung dieser Gleichung betrachten wir zunächst die (rein) quadratische Gleichung

$$x^2 = r$$

Ist $r > 0$, so besitzt diese Gleichung zwei Lösungen. Die positive Lösung bezeichnen wir mit $\sqrt{r}$. Der Nachweis der Existenz folgt später. Die Tatsache, dass es genau zwei Lösungen gibt, folgt mithilfe der 3. Binomischen Formel:

$$x^2 = r \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \sqrt{r}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - \sqrt{r})(x + \sqrt{r}) = 0$$

Da ein Produkt reeller Zahlen genau dann Null ist, wenn einer der beiden Faktoren Null ist, ist dies äquivalent zu

$$x - \sqrt{r} = 0 \quad \text{oder} \quad x + \sqrt{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{r} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{r},$$

d.h. die Gleichung $x^2 = r$ besitzt die Lösungen $x = \pm\sqrt{r}$.
Ist $r = 0$, so ist $x = 0$ die einzige Lösung der Gleichung $x^2 = 0$. Wir setzen daher $\sqrt{0} = 0$.

Ist $r < 0$, so besitzt die Gleichung $x^2 = r$ keine reelle Lösung, da Quadrate reeller Zahlen immer größer gleich Null sind.
Für $r \geq 0$ gilt also die folgende Äquivalenz:

$$x^2 = r \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \sqrt{r} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{r}.$$

Einschub 3.1.1. ...

Betrachtet man nun die allgemeine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

so kann diese durch quadratisches Ergänzen äquivalent in Scheitelpunktsform überführt werden:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(\frac{b^2}{4a} - c\right).$$

Diese Gleichung hat nach den vorangehenden Überlegungen zu rein quadratischen Gleichungen – hier für den Ausdruck $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ – genau die Lösungen

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Einschub 3.1.2. ...

Satz 3.1.3. *Die quadratische Gleichung* $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ *besitzt*

- *für* $b^2 - 4ac > 0$ *genau zwei reelle Lösungen, nämlich*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

- *für* $b^2 - 4ac = 0$ *genau eine reelle Lösung, nämlich* $x = \frac{-b}{2a}$,
- *für* $b^2 - 4ac < 0$ *keine reelle Lösung.*

Die Größe

$$D := b^2 - 4ac,$$

die über die Anzahl reeller Lösungen einer quadratischen Gleichung entscheidet, heißt Diskriminante *der Gleichung.*

Einschub 3.1.4. ...

Ist die Gleichung *normiert*, d.h. gilt $a = 1$, so liefert der Satz die sogenannte *p-q-Formel*:

Folgerung 3.1.5. *Die quadratische Gleichung* $x^2 + px + q = 0$ *besitzt*

- *für* $p^2 > -4q$ *genau zwei reelle Lösungen, nämlich* $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

  Einschub 3.1.6. ...

- *für $p^2 = 4q$ genau eine reelle Lösung, nämlich $x = -\frac{p}{2}$,*
- *für $p^2 < 4q$ keine reelle Lösung.*

Bemerkung 3.1.7. im Fall einer positiven Diskriminante D, also $D = b^2 - 4ac > 0$ liegen die Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

der Parabel symmetrisch zur Scheitelstelle $x = -\frac{b}{2a}$; im Fall $D = 0$ ist der Scheitelpunkt die einzige Nullstelle, d.h. die Parabel berührt die x-Achse.

Einschub 3.1.8. ...

3.2 Linearfaktorzerlegung

Zu gegebenen Stellen x_1, x_2 ist mit

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

für $a \neq 0$ eine quadratische Funktion gegeben, die genau die Nullstellen x_1 und x_2 besitzt und andersherum hat jede quadratische Funktion mit den Nullstellen x_1 und x_2 diese Gestalt.

Einschub 3.2.1. ...

Für $a = 1$, $p = b$ und $q = c$ erhält man den

Satz 3.2.2 (von Vieta)**.** *Besitzt eine normierte quadratische Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ die Nullstellen x_1 und x_2, so gilt: $-p = x_1 + x_2$ und $q = x_1 \cdot x_2$.*

Definition 3.2.3. Die Darstellung der Funktion f in der Form $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ heißt *Linearfaktorzerlegung*. Die Faktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ heißen *Linearfaktoren*.

Satz 3.2.4. *Eine quadratische Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ mit den Nullstellen x_1 und x_2 besitzt die eindeutige Linearfaktorzerlegung*

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Einschub 3.2.5. ...

Bemerkung 3.2.6. Im Spezialfall $x_1 = x_2$ gilt

$$f(x) = a(x - x_1)^2 = ax^2 + 2ax_1 \cdot x + ax_1^2,$$

d.h. für die Diskriminante gilt:

$$D = (2ax_1)^2 - 4a \cdot ax_1^2 = 0.$$

Folglich hat f genau eine Nullstelle. Im Sinne der Linearfaktorzerlegung handelt es sich eigentlich um zwei Nullstellen, die auf dieselbe Stelle fallen. In diesem Fall spricht man von einer *doppelten Nullstelle* x_1.

Beispiel 3.2.7.

3.3 Minimum oder Maximum einer quadratischen Funktion

Definition 3.3.1. Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Stelle $x_0 \in A$ heißt *(globale) Maximalstelle*, falls

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in A \text{ gilt.}$$

In diesem Fall heißt $f(x_0)$ *(globales) Maximum* und der Punkt $(x_0, f(x_0))$ *(globaler) Hochpunkt*.
Der Punkt $x_0 \in A$ heißt *(globale) Minimalstelle*, falls

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in A$$

gilt. Dann nennt man $f(x_0)$ das *(globale) Minimum* und $(x_0, f(x_0))$ den *(globalen) Tiefpunkt*.

Bemerkung 3.3.2. Gilt die jeweilige Ungleichung nur auf einer Umgebung von x_0 und nicht den ganzen Definitionsbereich A, spricht man von *lokalen* Maximal- und Minimalstellem, Maxima und Minima, Hoch- und Tiefpunkten.

Einschub 3.3.3. ...

Bei quadratischen Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-d)^2 + e$ gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:

Einschub 3.3.4. ...

Ist $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet und die Parabel hat einen Tiefpunkt im Scheitelpunkt (d, e), denn

$$f(x) = a \underbrace{(x-d)^2}_{\geq 0} + e \geq e = f(d) \quad \text{für alle } x$$

Ist $a < 0$, so ist die Parabel nach unten geöffnet und die Parabel hat einen Hochpunkt im Scheitelpunkt (d, e), denn

$$f(x) = a \underbrace{(x-d)^2}_{\geq 0} + e \leq e = f(d) \quad \text{für alle } x$$

Somit kann man bei quadratischen Funkitonen ein *Extremum* (d.h. Maximum oder Minimum) bestimmen, indem man den Scheitelpunkt bzw. die Scheitelpunktsform z.B. mit quadratischer Ergänzung bestimmt.

Einschub 3.3.5. ...

3.4 Monotonie

Anders als bei linearen Funktionen sind quadratische Funktionen nicht auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend oder fallend. Es gilt aber der folgende

Einschub 3.4.1. ...

Satz 3.4.2. *Eine quadratische Funktion f habe die Scheitelpunktsform*

$$f(x) = a(x-d)^2 + e.$$

- *Für $a > 0$ gilt: Auf dem Intervall $(-\infty, d]$ (also links vom Scheitelpunkt) ist der Graph von f streng monoton fallend und a uf dem Intervall $[d, +\infty)$ (also rechts vom Scheitelpunkt) ist der Graph von f streng monoton wachsend.*
- *Für $a < 0$ gilt: Auf dem Intervall $(-\infty, d]$ ist der Graph von f streng monoton wachsend und auf dem Intervall $[d, +\infty)$ ist der Graph von f streng monoton fallend.*

Beweis
Sei $x_1 < x_2$ gegeben, dann gilt für die Differenz

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= a(x_2-d)^2 + e - \big(a(x_1-d)^2 + e\big) = a\big((x_2-d)^2 - (x_1-d)^2\big) \\ &= a \cdot \big((x_2-d) + (x_1-d)\big) \cdot \big((x_2-d) - (x_1-d)\big) \\ &= a \cdot \big((x_2-d) + (x_1-d)\big) \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Fälle $a > 0$ und $a < 0$:

Einschub 3.4.3. ...

3.5 Quadratisches Wachstum

Bei linearem Wachstum erhält man bei gegebenem Zuwachs Δx der x-Werte stets denselben Zuwachs Δy der zugeordneten y-Werte, d.h. die Zunahme (Steigungsfaktor) ist konstant. Wächst hingegen die Zunahme linear, so erhält man quadratisches Wachstum:

Einschub 3.5.1. ...

Beispiel 3.5.2.

(i) Betrachte die Funktion $f(x) = ax$ und die Dreiecksfläche $A(x)$, den Graphen von f, die x-Achse und die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $(x, 0)$.

Einschub 3.5.3. ...

Dann gilt für den Zuwachs in x bei gegebener Zunahme Δx:

Einschub 3.5.4. ...

d.h. die relative Zunahme in x beträgt

Einschub 3.5.5. ...

d.h. der relative Zuwachs ist linear. Elementargeometrisch sieht man sofort, dass die Größe $A(x)$ quadratisch wächst: $A(x) = \frac{1}{2}ax^2$.

(ii) Als diskretes Analogon betrachte die Folge der ungeraden Zahlen 1,3,5,7,.... Diese Folge wächst linear (Konstante Zuwächse, nämlich gleich 2).

Sei s_n die Summe der ersten n ungeraden Zahlen. Es gilt $s_n = n^2$. Die Folge s_n wächst daher quadratisch.

Einschub 3.5.6. ...

(iii) *Gleichmäßig beschleunigte Bewegung*

Anders als bei gleichförmigen Bewegungen, bei denen die Geschwindigkeit v (d.h. die Ortsveränderung pro Zeit) konstant ist, wächst v hier linear mit der Zeit t, d.h.

$$v(t) = a \cdot t + v_0,$$

wobei v_0 die *Anfangsgeschwindigkeit* und a die *Beschleunigung* bezeichnet. Für den zurückgelegten Weg $s(t)$ nach der Zeit t gilt dann

$$s(t) = -\tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0,$$

wobei s_0 die Anfangsposition zur Zeitpunkt $t = 0$ bezeichnet.

Beispiel 3.5.7. Es folgen Beispiele zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung.

- *Bremsen:* Ein Fahrzeug bewegt sich mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 und wird abgebremst, d.h. es tritt eine negative Beschleunigung $-a$ auf. Entsprechend liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Weg-Zeit-Gesetz
$$s(t) = -\tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t$$
vor. Der Zeitpunkt t_0 des Anhaltens ist gegeben durch
$$v(t_0) = -at_0 + v_0 = 0,$$
d.h. $t_0 = \frac{v_0}{a}$. Der Bremsweg ist gegeben durch
$$s(t_0) = -\tfrac{1}{2}at_0^2 + v_0 t_0 = -\tfrac{1}{2}a\left(\tfrac{v_0}{a}\right)^2 + v_0\tfrac{v_0}{a} = \tfrac{1}{2a}v_0^2,$$
d.h. der Bremsweg wächst quadratisch mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

  Einschub 3.5.8. ...

- *freier Fall:* Im Schwerefeld der Erde bewegt sich jeder Körper gleichmäßig beschleunigt nach unten. Die Beschleunigung beträgt ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands $a = -g$, mit $g \approx 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Entsprechend lautet das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls
$$s(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2.$$

- *Wurfparabel:* Wirft man einen Körper schräg nach oben, so wird die Flugbahn durch eine Wurfparabel beschrieben. Diese Parabel hängt ab von der Anfangsgeschwindigkeit: Sei v_x die Anfangsgeschwindigkeit in horizontaler Richtung und v_y die Anfangsgeschwindigkeit in vertikaler Richtung.

  Einschub 3.5.9. ...

Alternativ kann man die Anfangssituation auch beschreiben mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 des Körpers und dem Abwurfwinkel α gegenüber der Horizontalen. In diesem Fall ist dann

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad v_y = v_0 \cdot \sin\alpha.$$

oder umgekehrt:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{und} \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\right).$$

Die Bewegung in horizontaler Richtung ist eine gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_x, d.h. für die x-Koordinate des Körpers gilt:

$$x(t) = v_x \cdot t.$$

Die Bewegung in vertikaler Richtung ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit v_y und Beschleunigung $-g$, d.h. für die y-Koordinate des Körpers gilt:

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}g \cdot t^2 + v_y \cdot t.$$

Bestimmung der Bahnkurve: Aus

$$x(t) = v_x \cdot t$$

folgt

$$t = \frac{x(t)}{v_x}.$$

Einsetzen in die Gleichung für $y(t)$ liefert:

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}g \cdot \left(\tfrac{x(t)}{v_x}\right)^2 + v_y \cdot \tfrac{x(t)}{v_x},$$

d.h. aufgefasst als Funktion von x ist y eine quadratische Funktion, die Bahnkurve ist also parabelförmig. Um die Wurfweite[1] zu bestimmen, setzen wir $y = 0$ und bestimmen die zugehörige Wurfweite x:

$$\begin{aligned} y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}g \cdot \left(\tfrac{x}{v_x}\right)^2 + v_y \cdot \tfrac{x}{v_x} = 0 \Leftrightarrow -\tfrac{1}{2}\tfrac{g}{v_x^2} \cdot x \cdot \left(x - 2\tfrac{v_x^2 \cdot v_y}{g \cdot v_x}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\tfrac{g}{v_x^2} \cdot x \cdot \left(x - \tfrac{2v_x \cdot v_y}{g}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = \tfrac{2v_x \cdot v_y}{g}, \end{aligned}$$

d.h die Wurfweite beträgt $\frac{2v_x \cdot v_y}{g}$.

3.6 Polynomfunktionen

Definition 3.6.1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Polynom(funktion)*, falls es *Koeffizienten* $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

Ist $a_n \neq 0$, so sagen wir, dass das Polynom den *Grad* n hat (kurz: $\text{grad}(f) = n$). Für das Nullpolynom $f = 0$ setzen wir $\text{grad}\,(f) = -\infty$.

Einschub 3.6.2. ...

[1] Hier gehen wir vereinfachend davon aus, dass der Körper am Boden abgeworfen wird und auch wieder am Boden landet, anderenfalls muss man die Abwurfhöhe mit berücksichtigen.

Beispiele 3.6.3. a. Polynome vom Grad 0 bzw. Grad 1 bzw. Grad 2 sind die konstanten bzw. linearen bzw. quadratischen Funktionen.

b. Polynome der Form $f(x) = x^n$ heißen *Potenzfunktionen* oder *Monome*. Monome f mit ungeradem Grad sind punktsymmetrisch zum Ursprung, d.h. es gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie sind streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Einschub 3.6.4. ...

Monome von geradem Grad sind achsensymmetrisch zur vertikalen Achse, d.h. es gilt $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Sie sind streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ und streng monoton wachsend auf $[0, +\infty)$.

Polynome haben ähnliche Eigenschaften wie die ganzen Zahlen:

Satz 3.6.5. *Die Menge der Polynome bilden (wie $\mathbb{Z}$) einen* euklidischen Ring*, d.h man kann Polynome mit den üblichen Rechenregeln addieren, subtrahieren und multiplizieren. Das Verfahren der Polynomdivison liefert eine Division mit Rest wie folgt:*
Zu Polynomen f und g, $g \neq 0$ (Nullpolynom), gibt es eindeutig bestimmte Polynome q und r mit

$$grad(r) < grad(g) \quad und \quad f = q \cdot g + r,$$

man spricht f durch g ergibt q mit Rest r.

Der Grad des Summenpolynoms ist kleiner gleich dem Maximum der Grade der Summanden. Der Grad des Produktpolynoms ist gleich der Summe der Grade der Faktoren.

Bemerkung 3.6.6. Man addiert und subtrahiert Polynome, indem man die Koeffizienten addiert bzw. subtrahiert. Dabei setzt man „fehlende" Koeffizienten gleich 0. Das Produkt der Polynome

$$\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

bestimmt man, indem man das Produkt

$$(a_m x^m + ... + a_0)(b_n x^n + ... + b_0)$$

in eine Summe $a_m b_n x^{m+n} + ... + a_0 b_0$ überführt.

Einschub 3.6.7. ...

Beispiele 3.6.8. Polynomdivision mit Rest

Einschub 3.6.9. ...

3.7 Nullstellen von Polynomen

Wie für quadratische Funktionen liefert der Ansatz

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n), \quad a \neq 0$$

ein Polynom

$$f(x) = ax^n + ...$$

vom Grad n mit genau den Nullstellen $x_1, ..., x_n$. Diese Darstellung heißt entsprechend auch *Linearfaktorzerlegung*. Ist eine Nullstelle x_1 bekannt, so kann man den zugehörigen Linearfaktor $x - x_1$ abspalten:

Einschub 3.7.1. ...

Satz 3.7.2. *Sei f ein Polynom vom Grad n, dann gilt:*
Der Punkt $x_1 \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Nullstelle von f, wenn es ein Polynom g vom Grad $n-1$ mit

$$f(x) = (x - x_1)g(x)$$

gibt. Das bedeutet, dass $x - x_1$ das Polynom f ohne Rest teilt.

Beweis Aufgrund der Division mit Rest existieren Polynome q und r mit

$$f(x) = q(x)(x - x_1) + r(x), \text{ mit } \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(x - x_1) = 1,$$

d.h. $r(x) = r_0$ ist eine Konstante. Nun ist x_1 genau dann eine Nullstelle von f, wenn

$$0 = f(x_1) = q(x_1)(x_1 - x_1) + r(x_1) = r_0,$$

also genau dann, wenn $f(x)$ ohne Rest durch $(x - x_1)$ teilbar ist. □

Folgerung 3.7.3. *Sei f ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, dann gilt:*
Sind $x_1, ..., x_k$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von f, so gibt es natürliche Zahlen $n_1, ..., n_k$ und ein Polynom g vom Grad $n - n_1 - n_2 - ... - n_k$ ohne reelle Nullstellen, so dass gilt:

$$f(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2}...(x - x_k)^{n_k}g(x).$$

Insbesondere hat ein Polynom vom Grad n höchstens n reelle Nullstellen.

Einschub 3.7.4. ...

Bemerkung 3.7.5. In den komplexen Zahlen gilt sogar der *Fundamentalsatz der Algebra*:

„Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt eine komplexe Nullstelle."

Durch sukzessiven Abspalten der Nullstellen folgt, dass für jedes Polynom f vom Grad $n \geq 1$ komplexe Zahlen $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$ als Nullstellen von f mit

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

existieren.

Im Reellen kann man mithilfe dieser Überlegungen (in den komplexen Zahlen) zeigen, dass sich jedes Polynom in Linearfaktoren und quadratische Faktoren zerlegen lässt: Für jedes Polynom f vom Grad $n \geq 1$ mit reellen Koeffizienten und reellen Nullstellen $x_1, ..., x_k$ gibt es quadratische Funktionen $q_1, ..., q_m$ ohne reelle Nullstellen, so dass

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)q_1(x)...q_m(x) \qquad \textit{(Reelle Produktdarstellung)}$$

gilt.

3.8 Anwendung: Interpolation

Einschub 3.8.1. ...

Satz 3.8.2. *Seien $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ Punkte mit paarweise verschiedenen x_i's. Dann gibt es genau ein Polynom f vom Grad höchstens n mit $f(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, 1, ..., n$. Diese Polynomfunktion f heißt* Interpolationspolynom.

Zum Beweis der Existenz solcher Polynome betrachtet man die sogenannten *Lagrange-Interpolationspolynome*

$$p_i(x) := \frac{(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot ... \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x_i - x_n)}; \qquad i = 0, 1, ..., n,$$

für die gilt

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i = j \end{cases}.$$

Dann ist

$$f(x) := \sum_{j=0}^{n} y_j p_j(x)$$

das gesuchte Polynom.

Einschub 3.8.3. ...

Die Eindeutigkeit einer solchen Darstellung zeigt man so: Sind f und g Interpolationspolynome, dann hat ist $f - g$ ein Polynom vom Grad höchstens n mit $n+1$ Nullstellen $x_0, ...x_n$. Daher muss $f - g$ nach Folgerung 3.7.3 das Nullpolynom sein, also $f = g$.

Zur Berechnung des Interpolationspolynoms kann man daher die Lagrange-Interpolationspolynome bestimmen und dann f wie oben angegeben berechnen.
Alternativ kann man mit $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ ansetzen und aus den Gleichungen

$$f(x_0) = y_0, ..., f(x_n) = y_n$$

ein lineares Gleichungssystem mit $n+1$ Gleichungen und den $n+1$ Unbekannten $a_n, ..., a_0$ erhalten. Dieses lineare Gleichungssystem hat nach dem vorstehenden Satz genau eine Lösung, nämlich die Koeffizienten des Interpolationspolynoms.

Nun folgt ein Beispiel zu dem obigen Ansatz und zur Langrange-Interpolation:

Einschub 3.8.4. ...

Kapitel 4

Zusammenfassung rückwärts I

Ziel dieses Abschnittes ist es, in einer Rückschau zu verdeutlichen, wie die einzelnen Abschnitte der Vorlesung zusammenhängen und aufeinander aufbauen.

Polynome (3.6.1.) sind Funktionen vom Typ

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Man kann mit ihnen wie mit den ganzen Zahlen bzw. wie mit Variablen rechnen, indem man die Terme zu den Potenzen koeffizientenweise addiert und beim Multiplizieren Klammern ausmultipliziert (3.6.7.). Division von Polynomen ergibt analog zu den ganzen Zahlen die Polynomdivision mit Rest (3.6.8.). Eine Polynomdivision durch Linearfaktoren $x - x_i$, die den Rest Null ergibt, nennt man Abspalten von Nullstellen (3.7.1.) von Polynomen. Jede Nullstelle x_i eines Polynoms läßt sich so abspalten und ergibt eine neue Darstellung $f(x) = (x - x_i)g(x)$ des Polynoms f mit einem neuen Polynom g kleineren Grades (3.7.2.). Die Nullstellen von g sind Nullstellen von f und durch Wiederholung des Verfahrens erhält man die reelle Produktdarstellung eines Polynoms f, nämlich

$$f(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} ... (x - x_k)^{n_k} q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_m(x)$$

wobei $x_1, \ldots, x_k$ die paarweise verschieden Nullstellen von f und $q_1, \ldots, q_m$ quadratische Funktionen ohne reelle Nullstellen sind (3.7.5.).

Eine Anwendung von Polynomfunktionen ist die Interpolation. Dabei ist zu $n + 1$ Punkten in einem Koordinatensystem ein Polynom vom Grad n gesucht, dass durch diese Punkte verläuft (3.8.1.). Die Lagrangepolynome liefern ein solches Polynom (3.8.2.).

Polynome sind also Produkte von linearen und quadratischen Funktionen. Beide Typen haben wir vorher intensiv untersucht.

Quadratische Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ haben ein lokales Extremum am Scheitelpunkt (d, e) je nachdem, ob der Graph nach oben oder nach unten geöffnet ist (3.3.4.). An der Scheitelpunktsform $f(x) = a(x - d) + e$ läßt sich die Extremstelle d und der Extremwert $e = f(d)$ ablesen (3.0.4./3.0.5.). Für $a < 0$ ist die Funktion links vom Scheitelpunkt streng monoton wachsend und rechts vom Scheitelpunkt streng monoton fallend (3.4.2.). Umgekehrt für $a > 0$. Die Nullstellen x_1, x_2 einer quadratischen Funktion sind weitere charakteristische Punkte. Sie lassen sich an der Linearfaktorzerlegung $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ ablesen (3.2.4.). Die Nullstellen errechnet man mit der p-q-Formel (3.1.5.). Die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ entscheidet, wie viele Nullstellen (keine, eine oder zwei) es gibt (3.1.3.).

Rechnerisch erhält man die Scheitelpunktsform durch quadratisches Ergänzen (3.0.4.) aus $ax^2 + bx + c$ und die Linearfaktorzerlegung durch Berechnung der Nullstellen von f. Letzteres verwendet man dann auch, wenn man allgemeine Polynome wie oben in Linearfaktoren zerlegen will, sobald nur noch ein quadratisches Polynom nach der Polynomdivision übrig bleibt (3.7.1.).

Graphisch ensteht eine quadratische Funktion durch Verschieben längs der Koordinatenachsen und Strecken/Stauchen aus dem Graphen der Normalparabel x^2 (3.0.4.). Diesen Prozess nennt man lineares Skalieren.

Quadratische Funktionen haben Anwendungen bei Berechnung von Dreiecksflächen (3.5.5.) und physikalischen Phänomenen wie Bremsen (3.5.7.) oder Werfen (3.5.9.). Dabei wächst die Fläche bzw. die Wegstrecke jeweils quadratisch (Weg-Zeit-Gesetz einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung).

Lineare Funktionen sind von der Gestalt $f(x) = ax + b$. Ist die Steigung $a < 0$, so ist sie streng monoton fallend, für $a > 0$ streng monoton wachsend (2.7.3.). Für $a = 0$ handelt es sich um eine konstante Funktion. Die Steigung a ergibt sich aus einem Steigungsdreieck (2.2.2.). Dabei können die Stellen x_1, x_2 für das Steigungsdreieck beliebig gewählt werden und die Steigung a ergibt sich aus dem Verhältnis der Kathetenlängen des rechtwinkligen Dreiecks. Lineare Funktionen haben keine lokalen Extrema, allerdings können stückweise lineare Funktionen lokale Extrema an den Rändern der stückweise definierten Definitionsbereiche haben (2.9.1.). Lineare Funktionen haben genau eine Nullstelle $-\frac{b}{a}$ (2.5.), sofern sie nicht konstant sind. Die Umkehrfunktion einer linearen Funktion ist wieder eine lineare Funktion (2.6.).

Für $b = 0$ ergeben sich die proportionalen Funktionen (2.1.1.), die viele Anwendungen haben wie gleichförmige Bewegung, Umrechnung von Einheiten oder Dreisatz im allgemeinen (2.1.5.). Die Steigung a einer solchen Funktion f heißt Proportionalitätsfaktor und es gilt $a = f(1)$.

Analog zu den quadratischen Funktionen geht eine lineare Funktion durch lineares Skalieren aus der Funktion $f(x) = x$ hervor (2.10.6.).

Der Graph einer linearen Funktion ist eindeutig durch eine Gerade durch zwei Punkte im Koordinatensystem gegeben. Dies ist ein Spezialfall der Interpolation von Polynomen. Mit der Zwei-Punkte-Form (2.3.2.) läßt sich die Funktionsgleichung direkt angeben. Auf der anderen Seite ist der Graph einer linearen Funktion auch eindeutig durch die Steigung a und einen Punkt gegeben, der auf der Geraden liegen soll (Punkt-Steigungs-Form 2.3.1.).

In Anwendungen werden häufig Schnittpunkte von Graphen linearer Funktionen gesucht. Diese erhält man durch Gleichsetzen und Auflösen nach x oder durch allgemein hergeleitete Formeln (2.8.).

Allgemeine Polynome und ihre Spezialfälle (lineare Funktion, quadratische Funktion) sind sogenannte 'Funktionen'. Funktionen $f : A \to B$ sind Abbildungen, für die $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ gilt (1.4.20.). Eine Abbildung Γ ist eine Relation (= Teilmenge) $\Gamma \subset A \times B$, so dass jedes $a \in A$ höchstens zu einem Element $b \in B$ in Relation steht (1.4.17.).

Damit ist eine Funktion eine spezielle Relation. Es gibt noch andere Relationen auf Mengen, zum Beispiel die Ordnungsrelation (1.4.12.) oder die Äquivalenzrelation (1.4.8.).

Kapitel 5

Weitere wichtige Funktionen

5.1 Umkehrfunktionen, Wurzelfunktionen

Wir hatten bereits beobachtet, dass Umkehrfunktionen zu Funktionen im Allgemeinen nicht immer existieren. Unter welchen Bedingungen das aber der Fall ist, untersuchen wir in dem folgenden Abschnitt.

5.1.1 Bijektivität

Erinnerung: In der Definition einer Funktion $f\colon A \to B$ haben wir verlangt, dass **jedem** Element $x \in A$ **genau ein** Element $y \in B$ zugeordnet wird. Wir haben von Funktionen **nicht** verlangt, dass

- verschiedene Elemente aus dem Defintionsbereich verschiedenen Elementen im Wertebereich zugeordnet werden müssen.
- alle Elemente im Wertebereich von einem Elemente im Definitionsbereichs getroffen werden müssen.

Einschub 5.1.1. ...

Wenn Funktionen diese Eigenschaften aber zusätzlich besitzen, nennen wir sie *surjektiv* bzw. *injektiv*. Formal:

Definition 5.1.2. Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt

- *surjektiv*, falls zu jedem $b \in B$ mindestens ein $a \in A$ existiert mit $f(a) = b$.
- *injektiv*, falls aus $f(a) = b = f(a')$ stets $a = a'$ folgt. (Alternativ: $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$)
- *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiele 5.1.3. Betrachtet man die Abbildung

$$f\colon A \to B, \quad x \mapsto x^2$$

so ist im Fall

- $A = B = \mathbb{R}$ die Abbildung weder injektiv noch surjektiv.
- $A = [0, \infty)$, $B = \mathbb{R}$ die Abbildung injektiv, aber nicht surjektiv.
- $A = \mathbb{R}$, $B = [0, \infty)$ die Abbildung surjektiv, aber nicht injektiv.
- $A = B = [0, \infty)$ die Abbildung bijektiv.

Einschub 5.1.4. ...

Bemerkung 5.1.5.

(i) Durch Verkleinern von Definitons- bzw. Wertebereich kann man Injektivität bzw. Surjektivität „erzwingen".

(ii) Ist für $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (oder fallend) auf D, so ist f injektiv.

Einschub 5.1.6. ...

(iii) Ist $f\colon A \to B$ bijektiv, so gilt also:

Zu **jedem** $y \in B$ gibt es **genau ein** Urbild $x \in A$.

Diese Zuordnung erfüllt die Eigenschaften einer Funktion mit Definitionsbereich B und Wertebereich A und definiert damit die **Umkehrfunktion** f^{-1}:

$$f^{-1}\colon B \to A.$$

Ist $f\colon A \to B$ bijektiv, so kann man f also „umkehren", d.h. die Umkehrrelation

$$\Gamma^{-1}(f) := \{(f(x), x) \mid x \in A\}$$

ist eine Funktion von B nach A, die *Umkehrfunktion* zu f.

Insgesamt gilt also der

Satz 5.1.7. *Eine Funktion $f\colon A \to B$ ist genau dann umkehrbar, wenn sie bijektiv ist. Für die Umkehrfunktion*

$$f^{-1}\colon B \to A$$

gilt:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \qquad \text{für alle } x \in A \\ f(f^{-1}(y)) &= y \qquad \text{für alle } y \in B \end{aligned}$$

Einschub 5.1.8. ...

Wie schon bekannt ist der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} dann geometrisch die Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden (d.h. an der Geraden zu $y = x$).

Beispiele 5.1.9.

(i) Zu $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto x^2$ ist f^{-1} die Quadratwurzelfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

(ii) Die Funktion zu $f(x) = ax + b$ ist für $a \neq 0$ stets bijektiv mit Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Bemerkung 5.1.10. Man kann Injektivität und Surjektivität einer Funktion $f\colon A \to B$ auch wie folgt interpretieren:
Betrachte die Gleichung

$$f(x) = y.$$

als Gleichung mit rechter Seite $y \in B$ für die Unbekannte $x \in A$.

f ist **surjektiv** bedeutet:
Gleichung ist für jede rechte Seite $y \in B$ lösbar.

f ist **injektiv** bedeutet:
Wenn Gleichung lösbar ist für eine rechte Seite $y \in B$, dann ist die Lösung x eindeutig.

f ist **bijektiv** bedeutet:
Gleichung ist für jede rechte Seite $y \in B$ eindeutig lösbar.

5.2 Wurzeln

Wie oben festgestellt sind für $n \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktionen

$$f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$$

streng monoton wachsend und entsprechend injektiv. Schränkt man den Wertebereich von f_n auf die Menge $[0,\infty)$ ein, so ist f_n auch surjektiv, also bijektiv und damit umkehrbar.

Definition 5.2.1. Die Umkehrfunktion von f_n definiert die *n-te Wurzelfunktion*:

$$f_n^{-1}\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

Für jedes $b \geq 0$ ist also $\sqrt[n]{b}$ die eindeutige nichtnegative Lösung x der Gleichung

$$x^n = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{b}.$$

5.3 Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Eine Potenzfunktion zum Exponenten $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit einer Zuordnungsvorschrift vom Typ $f(x) = x^a$.

Was verstehen wir unter x^a für $a \in \mathbb{R}$, z.B. $x^{\sqrt{2}}$? Wir definieren dies schrittweise:

(i) Für $a \in \mathbb{N}$ ist

$$x^a = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{a \text{ Faktoren}}, \qquad \text{und außerdem } x^0 = 1.$$

Diese Definitionen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ zulässig.

(ii) Für $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$, ist

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}}.$$

Diese Defintion ist nur noch für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, möglich.

(iii) Für $a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, ist $x^a = x^{\frac{1}{n}}$ das Urbild von x unter der bijektiven Funktion $f_n\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^n$. Wir schreiben dann

$$x^{\frac{1}{n}} := f_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

und speziell $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Diese Definition ist nur möglich für $x \in [0,\infty)$.

(iv) Für $a = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, ist

$$x^a = x^{\frac{m}{n}} := (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

Diese Defintion ist nur noch für $x \in (0,\infty)$ möglich.

Einschub 5.3.1. Schritte (i) bis (iv) an einem Beispiel

(v) Für $a \in \mathbb{R}$ nähern wir a durch Brüche an, z.B. $a = \sqrt{2}$ durch

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ \ldots$$

und betrachten dann

$$x^1, x^{1{,}4}, x^{1{,}41}, x^{1{,}414}, \ldots\ .$$

Diese Werte nähern sich dann $x^{\sqrt{2}}$ an. Genaueres hierzu und insbesondere zu den auftretenden Grenzübergängen werden wir später lernen, wenn wir reelle Zahlenfolgen behandeln. Für den Moment genügt uns diese Anschauung.

Satz 5.3.2 (Rechenregeln für Potenzen)**.** *Seien $x, y \in (0,\infty)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Identitäten*

$$x^{a+b} = x^a \cdot x^b\,,$$
$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}\,,$$
$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a\,.$$

Definition 5.3.3. Für $a > 0$ heißt die Funktion $\exp_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ *Exponentialfunktion zur Basis a.*

Einschub 5.3.4. Graphen der Exponentialfunktion

5.3.1 Eigenschaften der Exponentialfunktion

(i) $\exp_a(0) = 1$

(ii)

$$\begin{aligned}
\exp_a(-x) &= a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{\exp_a(x)}, \\
\exp_a(x+y) &= a^{x+y} = a^x a^y = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y), \\
\exp_a(x)^y &= (a^x)^y = a^{xy} = \exp_a(x \cdot y)
\end{aligned}$$

(iii) $\exp_a$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend, für $0 < a < 1$ streng monoton fallend und für $a = 1$ konstant gleich 1.

(iv) Für das Bild von $\mathbb{R}$ unter der Exponentialfunktion gilt für $a \neq 1$: $\exp_a(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

Definition 5.3.5 (Logarithmus)**.** Aufgrund der letzten beiden Eigenschaften ist die Exponentialfunktion $\exp_a \colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$\log_a \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x), \qquad a > 0, \qquad a \neq 1$$

heißt *Logarithmus zur Basis a.*

Bemerkung 5.3.6. Da der Logarithmus gemäß Definition die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion ist, gilt also:

Einschub 5.3.7. ...

Einschub 5.3.8. GRaphen der Logarithmusfunktion

5.3.2 Eigenschaften der Logarithmusfunktion

Satz 5.3.9 (Rechenregel für Logarithmen)**.**

(i) $\log_a(1) = 0$

(ii) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(iii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

(iv) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x), \quad r \in \mathbb{R}$

(v) $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

Teil (v) heißt: ein Basiswechsel beim Logarithmus bedeutet eine lineare Skalierung (vertikales Strecken/Stauchen). Entsprechend reicht die genaue Betrachtung nur einer Basis.

Die Funktion $\log_a\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ist bijektiv, für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $a < 1$ streng monoton fallend.
Häufig werden die folgenden Basen verwendet:

$a = 10$: *Zehnerlogarithmus* $\log_{10} =: \log$

$a = 2$: *Zweierlogarithmus* $\log_2 = \mathrm{ld}$,

$a = e$: *Natürlicher Logarithmus*, (*e Eulersche Zahl*, vgl. unten). Für den natürlichen Logarithmus schreiben wir ln statt $\log_e$.

Bemerkung 5.3.10 (Basiswechsel)**.** Jede andere Basis erhält man dann durch:

$$\exp_a(x) = a^x = (\exp_e(\log_e(a)))^x = (\exp_e(\ln(a)))^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{\ln(a)\cdot x},$$

d.h. jede Exponentialfunktion ist eine linear skalierte natürliche Exponentialfunktion (horizontales Strecken/Stauchen).

5.3.3 Exponentielles Wachstum

Betrachte die Funktion

$$f(x) = c \cdot a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1,$$

dann gilt für ein festes $\Delta x \in \mathbb{R}$:

$$f(x + \Delta x) = c \cdot a^{x+\Delta x} = c \cdot a^x \cdot a^{\Delta x} = f(x) \cdot a^{\Delta x} = c_{\Delta x} \cdot f(x),$$

wobei

$$c_{\Delta x} := a^{\Delta x}.$$

Eine Änderung des Arguments x um eine feste Größe Δx bewirkt daher eine *Multiplikation* mit einem von Δx (aber nicht von x) abhängigen, aber sonst festen Faktor $c_{\Delta x}$. Ein solches Wachstumsverhalten heißt *exponentielles Wachstum.*
Zum Vergleich bewirkt bei linearem Wachstum, beschrieben durch $l(x) = ax + b$, die Änderung des Arguments um Δx die *Addition* einer festen Größe, nämlich

$$l(x + \Delta x) = a(x + \Delta x) + b = ax + a\Delta x + b = l(x) + a\Delta x.$$

Ist $a < 1$, ist f streng monoton fallend. In diesem Fall spricht man auch von *exponentiellem Abklingen.*

Exponentielles Wachstum kommt typischerweise in Modellen für Wachstums- oder Zerfallsprozesse vor:

- Bevölkerungswachstum, Zellwachstum, radioaktiver Zerfall
- Berechnung von Zinseszinsmodellen, Modelle für Mehrfachverzinsung pro Jahr, kontinuierliche Verzinsung

In diesen Fällen wählt man häufig t als Variable für die Zeit. Diejenige Schrittweite Δt, für die

- $c_{\Delta t} = 2$ gilt, nennt man *Verdopplungszeit*
- $c_{\Delta t} = \frac{1}{2}$ gilt, nennt man *Halbwertszeit.*

Für die Verdopplungszeit Δt gilt wegen

$$f(t + \Delta t) = c_{\Delta t} \cdot f(x) = 2 \cdot f(t)$$

folglich

$$a^{\Delta t} = c_{\Delta t} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta t = \log_a 2.$$

Entsprechend erhält man für die Halbwertszeit: $\Delta t = \log_a \frac{1}{2}$

Einschub 5.3.11. Beispiel zur Halbwertzeit

Wie oben dargestellt kann die Funktion f mithilfe der natürlichen Exponentialfunktion (e-*Funktion*) beschrieben werden, nämlich

$$f(x) = c \cdot a^x = c \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = c \cdot e^{\lambda x}.$$

In diesem Fall heißt $c = f(0)$ *Anfangswert* und $\lambda \neq 0$ *Wachstumsrate* .

Exponentielles Wachstum ist schnell, insbesondere schneller als jedes polynomielle Wachstum. Logarithmisches Wachstum hingegen ist langsamer als jedes polynomielle Wachstum. Was dies präziser bedeutet klären wir im nächsten Kapitel.

Beispiele 5.3.12.

- *Bevölkerungswachstum:* In einem Modell für das Bevölkerungswachstum nehmen wir an, dass die Zunahme der Bevölkerung proportional mit Proportionalitätsfaktor p zur Größe der Bevölkerung $f(t)$ ist, d.h. es gilt:

  $$f(t + 1) - f(t) = p \cdot f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t + 1) = (1 + p) \cdot f(t)$$

  Gegeben die Größe n_0 der Bevölkerung zur Zeit $t = 0$, so erhalten wir

  $$f(t) = n_0 \cdot (1 + p)^t$$

  als exponentielles Modell für die Beschreibung der Bevölkerungsentwicklung. Die unbekannten Parameter p und n_0 müssen jetzt aus vorhandenen Daten bestimmt werden. Die Weltbevölkerung betrug 2010 etwa 6,96 Mrd. und 2020 etwa 7,79 Mrd. Menschen. Setzen wir den Zeitpunkt $t = 0$ für das Jahr 2010, so folgt:

  $$f(0) = n_0 = 6,96 \qquad \text{(in Mrd.)}$$

  und

  $$f(10) = n_0 \cdot (1 + p)^{10} = 7,79,$$

  $$\Rightarrow \quad (1 + p)^{10} = \frac{7,79}{6,96} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt[10]{\frac{7,79}{6,96}} - 1 \approx 0,0113 = 1,13\%.$$

  Entsprechend verdoppelt sich die Bevölkerung in $\log_{1+p} 2 = \frac{\log 2}{\log(1+p)} \approx 61,5$ Jahren.

- *Zellwachstum:* Durch Zellteilung verdoppelt sich die Zahl der Zellen in einer gegebenen Zeitspanne Δt, d.h. die Verdopplungszeit ist mit Δt gegeben. Entsprechend kann man im Wachstumsmodell für die Anzahl der Zellen
$$N(t) = N_0\, a^t$$
mit Anfangszellenzahl N_0 die Basis a bestimmen durch
$$a^{\Delta t} = 2 \Leftrightarrow a = 2^{\frac{1}{\Delta t}}.$$
Es gilt also
$$N(t) = N_0 \cdot (2^{\frac{1}{\Delta t}})^t = N_0 \cdot 2^{t/\Delta t}.$$
Wählt in dem Modell man die Eulersche Zahl als Basis, so erhalten wir $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$ mit der Wachstumsrate $\lambda = \frac{\ln 2}{\Delta t}$, denn:

- *Radioaktiver Zerfall:* Sei $N(t)$ die Anzahl radioaktiver Kerne zur Zeit t. Wir nehmen an, dass die Anzahl der zerfallenden Atome pro Zeiteinheit proportional zu der Anzahl vorhandener Atome ist.

  Wie im ersten Beispiel erhalten wir exponentielles Wachstum, hier mit negativer Wachstumsrate, also ein exponentielles Abklingen. Entsprechend setzen wir folgendes Modell an:
$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}, \text{ mit } \lambda > 0.$$
Die Halbwertszeit Δt ist die Zeitspanne, in der sich die Anzahl Atome halbiert, also für die $e^{-\lambda \Delta t} = \frac{1}{2}$ gilt. Logarithmieren liefert mithilfe der Logarithmengesetze die Gleichung
$$\Delta t = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

- *Zinseszinsmodell:* Ein Anfangsguthaben K_0 wird jährlich mit Zinsrate p verzinst. Wird das Guthaben nicht verändert, verfügt man dank Zinseszins nach n Jahren über ein Guthaben in Höhe von
$$K(n) = (1+p)^n \cdot K_0.$$
Bei unterjähriger Verzinsung wird innerhalb eines Jahres das Kapital m Mal verzinst (z.B. bei $m = 4$ quartalsweise, bei $m = 12$ monatlich usw.). Geschieht dies mit dem *Nominalzins* $p\%$ bedeutet das, dass das Kapital im Jahr m mal mit $\frac{p}{m}\%$ verzinst wird, d.h. am Ende des Jahres beträgt das Guthaben $\left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^m \cdot K_0$. Das entspricht einer Verzinsung mit $\left(\left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^m - 1\right) \cdot 100\%$. Diesen Zins nennt man *effektiven Jahreszins.*

5.4 Trigonometrische Funktionen

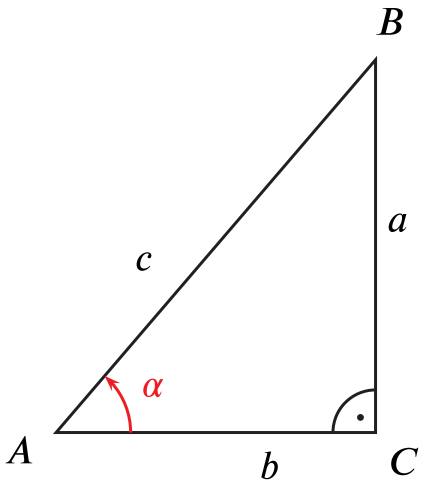
Ist in einem rechtwinkligen Dreieck ein weiterer Winkel α bekannt, so ist auch der dritte Winkel bekannt (Innenwinkelsumme) und folglich sind je zwei solche Dreiecke ähnlich.

Damit müssen sie nicht gleichen Seitenlängen besitzen, aber die Verhältnisse der Seitenlängen sind gleich und hängen damit nur von dem Winkel α ab.

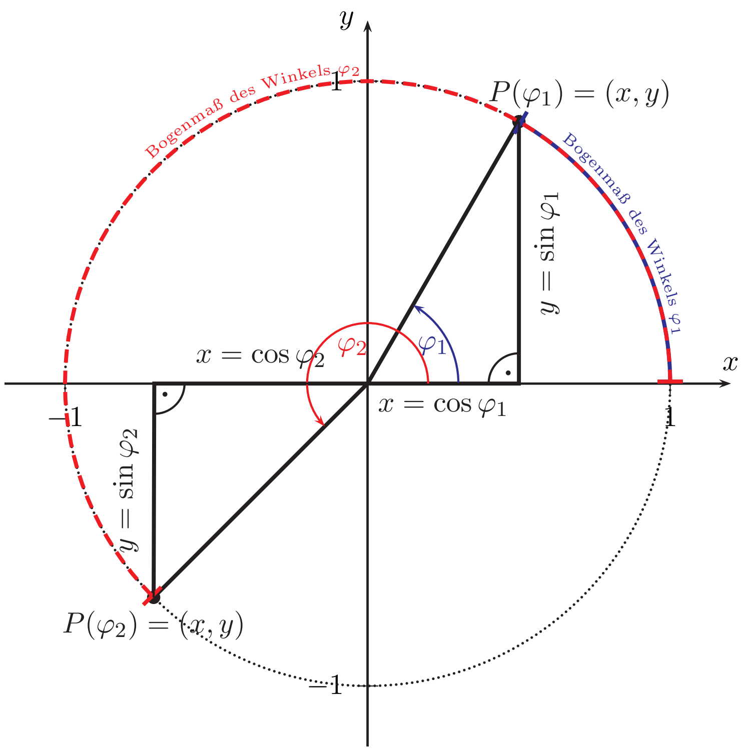
Man nennt

die dem Winkel α gegenüberliegende Seite die **Gegenkathete**	Länge: a
die am Winkel α anliegende Seite die **Ankathete**	Länge: b
die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die **Hypotenuse**	Länge: c

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



Wählt man speziell für die Hypotenusenlänge $c = 1$, so lassen sich die Werte von Sinus und Kosinus veranschaulichen, indem man das Dreieck in den Einheitskreis einpasst (mit der Hypotenuse als Radius):

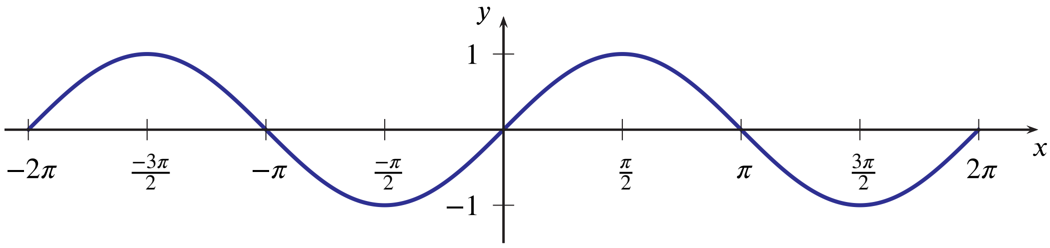


Meistens geben wir Winkel im Bogenmaß an. Das ist die Länge des Bogenstücks am Einheitskreis, das dem Winkel zugeordnet ist. Ist ein Winkel ϕ im Gradmaß gegeben, so berechnet sich das zugehörige Bogenmaß t mit der Formel

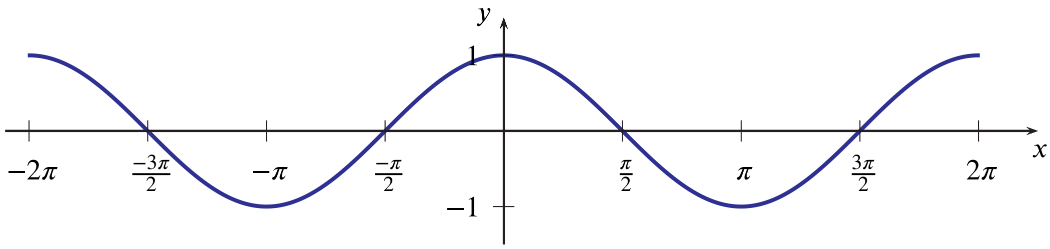
$$t = \frac{\phi}{360°} \cdot 2\pi \ .$$

Auf diese Weise erhält man die trigonometrischen Funktionen

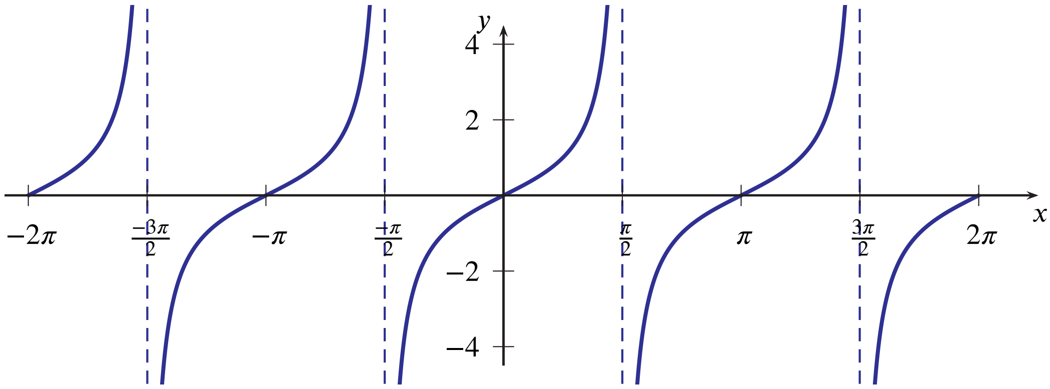
$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



$\tan : \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} \to \mathbb{R}$



Hier ist ein schönes Applet, mit Hilfe dessen man die trigonometrischen Funktionen veranschaulichen kann: https://www.geogebra.org/m/FJtrEDAr

Kapitel 6

Konvergenz von Zahlenfolgen

Motivation I: Warum reichen die rationalen Zahlen nicht aus?

Da man in $\mathbb{Q}$ uneingeschränkt Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und (außer durch 0) Dividieren kann, sind *lineare Gleichungen*, also Gleichungen der Form $ax + b = 0$ für $a \neq 0$, in $\mathbb{Q}$ stets lösbar. Das Quadrieren kann in $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen nicht rückgängig gemacht werden, d.h. (selbst) für $a > 0$ ist die Gleichung $x^2 - a = 0$ in $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen nicht lösbar:

Satz 6.0.1. *Eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ ist keine rationale Zahl.*
Die positive Lösung der Gleichung, die in den reellen Zahlen existiert, bezeichnen wir mit $\sqrt{2}$ („Wurzel 2").

Einschub 6.0.2. ...

Bemerkung: Ähnlich zeigt man, dass $\sqrt{m} \in \mathbb{Q}$ genau dann gilt, wenn m eine Quadratzahl ist.

$\mathbb{Q}$ besitzt also Lücken.

Man beschreibt diese Lücken, indem man **Intervallschachtelungen** konstruiert, d.h. Folgen von Intervallen

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ [a_3, b_3],\ \ldots, \qquad a_n, b_n \in \mathbb{Q},$$

die ineinander geschachtelt sind

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

und deren Länge $b_n - a_n$ für $n \to \infty$ gegen Null strebt.

Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ zeichnet nun gerade aus, dass es für jede Intervallschachtelung eine reelle Zahl x gibt, die im Durchschnitt aller Intervalle liegt:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

Auf diese Weise „schließt“ man die Lücken in $\mathbb{Q}$ und man nennt diese Eigenschaft die **Vollständigkeit** von $\mathbb{R}$.

Die **Dezimalbruchentwicklung** nutzt gerade diese Möglichkeit, reelle Zahlen durch eine Intervallschachtelung zu beschreiben:

Während ein *abbrechender Dezimalbruch*:

$$a_0, a_1 a_2 ... a_n := a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + ... + a_n \cdot 10^{-n} = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k},$$

mit $a_0 \in \mathbb{Z},\ a_1, ..., a_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$

eine endlich Summe ist und stets eine rationale Zahl beschreibt, gibt es auch *unendliche Dezimalbrüche*

$$a_0, a_1 a_2 a_3 ... := a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + ... = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}}_{?}.$$

Damit meint man, dass z.B.

$$\pi = 3,141592659\dots$$

durch die Intervallschachtelung beschrieben wird, die durch Abbrechen nach n Stellen entsteht, also

n	
0	$\pi \in [3; 4]$
1	$\pi \in [3,1; 3,2]$
2	$\pi \in [3,14; 3,15]$
$\vdots$	$\vdots$
7	$\pi \in [3,1415926; 3,1415927]$
$\vdots$	$\vdots$

Im Folgenden soll nun geklärt werden, was die mathematisch präzise Bedeutung einer unendlichen Summe, z.B. der unendlichen Dezimalbruchentwicklung $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$, ist und wie man irrationale Zahlen wie etwa $\sqrt{2}$ (effizient) näherungsweise bestimmen kann.

6.1 Folgen

Motivation II: Wir haben gesehen, dass der effektive Jahreszins bei unterjähriger Verzinsung mit $\frac{p}{m}\%$ mehr erwirtschaftet als die jährliche Verzinsung mit $p\%$. Für $p = 0.05$ (also 5% Zinsen) lautet die Formel für das Kapital

$$K(m) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{0.05}{m}\right)^m$$

wobei zum Beispiel mit $m = 12$ monatlich und $m = 365$ tägliche Verzinsung gemeint ist.

Frage: Wie groß wird $K(m)$ wenn wir m sehr groß werden lassen?

Antwort:

Definition 6.1.1. Eine Folge reeller Zahlen ist eine Funktion

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a(n) := a_n,$$

die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet. Die Zahl a_n heißt das n-te Glied der Folge, die Folge insgesamt wird mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. kurz mit (a_n) oder auch a_n bezeichnet.

Beispiele 6.1.2.

(i) $a_n = n^2$, Folge der Quadratzahlen: 1, 4 ,9, 16, ...

(ii) $a_n = \frac{1}{n}$, "harmonische" Folge: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ...

Die Folgenwerte nähern sich der Zahl 0 an.

Dieses Bild wird präzisiert in der Definition der Konvergenz einer Folge:

Definition 6.1.3. Zu einem $\varepsilon > 0$ definiert man die *ε-Umgebung von* $a \in \mathbb{R}$ als das Intervall

$$I_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - a| < \varepsilon\}$$

Einschub 6.1.4. ...

Die Folge a_n *konvergiert* für $n \to \infty$ gegen einen *Grenzwert* $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen **alle, bis auf endlich viele** Folgenglieder a_n in der ε-Umgebung $I_\varepsilon(a)$ von a.

Eine Folge a_n heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, das Grenzwert der Folge ist. Andernfalls heißt die Folge **divergent**.

Mit anderen Worten: Egal wie klein ε gewählt wird, ab einer gewissen Nummer liegen alle Folgenglieder in der ε-Umgebung von a.

In diesem Fall schreiben wir kurz:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \text{ für } n \to +\infty.$$

Man spricht: a_n geht/strebt gegen a für n gegen unendlich.

Beispiele 6.1.5.

- Die konstante Folge $(a, a, a, a, ...)$ konvergiert gegen a.

  Einschub 6.1.6. ...

- *Harmonische Folge:* Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen $a = 0$:

  Einschub 6.1.7. ...

- *Geometrische Folge:* Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$.

  Einschub 6.1.8. ...

- Die *alternierende* Folge $a_n = (-1)^n$, also $(a_n) = (-1, 1, -1, ...)$ ist nicht konvergent.

  Einschub 6.1.9. ...

6.1.1 Grenzwertsätze

Man kann mit „$\lim_{n\to\infty}\cdots$" auch „rechnen", aber nur falls es sich um konvergente Folgen handelt.

Satz 6.1.10 (Grenzwertsätze)**.** *Es seien a_n, b_n reelle Zahlenfolgen. Weiterhin seien a_n und b_n konvergent mit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. Dann gilt:*

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(iii) Ist $b \neq 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ konvergiert und es gilt: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Beispiele 6.1.11.

Beispiele 6.1.12. Sei $a_n = \frac{n^2+4n}{2n^2+1}$.

Definition 6.1.13 (beschränkt)**.** Sei a_n ein Folge. Wir nennen a_n *beschränkt* wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ (sogenannte Schranke) gibt, so dass

$$|a_n| \leq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

gilt.

Beispiele 6.1.14.

(i) $a_n = \frac{1}{n}$ ist beschränkt durch $K = 1$, denn

Einschub 6.1.15. ...

(ii) $b_n = n$ ist **nicht** beschränkt.

Einschub 6.1.16. ...

(iii) $c_n = (-1)^n$ ist beschränkt, denn

$$|c_n| = |(-1)^n| = 1$$

(iv) $d_n = \sin(n)$ ist beschränkt, denn wir haben bereits gesehen, dass $|\sin(n)| \leq 1$ gilt, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 6.1.17 (Nullfolge $\cdot$ beschränkt $=$ Nullfolge)**.** *Sei a_n ein beschränkte Folge und b_n eine Nullfolge (d.h. eine konvergente Folge mit Grenzwert 0). Dann ist die Folge $a_n \cdot b_n$ eine Nullfolge.*

Beweis:

Einschub 6.1.18. ...

Beispiele 6.1.19. Die Folge

$$c_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

konvergiert gegen 0, denn

$$c_n = \frac{\sin(n)}{n} = \underbrace{\sin(n)}_{=a_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{=b_n}$$

Wegen $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ ist $\sin(n)$ beschränkt, $\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge, daher folgt nach Satz 6.1.17, dass c_n eine Nullfolge ist.

Satz 6.1.20 (Jede konvergente Folge ist beschränkt)**.** *Sei a_n ein konvergente Folge. Dann ist die Folge a_n beschränkt.*

Einschub 6.1.21. ...

Beweis: Sei a_n ein konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$. Nehmen wir $\varepsilon = 1$. Dann wissen wir (wegen Konvergenz), dass ein $N \in \mathbb{N}$ eixstiert mit

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| \leq 1.$$

Wir setzen

$$K := \max(|a_1 - a|, |a_2 - a|, |a_3 - a|, ..., |a_N - a|, 1)$$

dann gilt

$$|a_n - a| \leq K \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit folgt, dass

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq K} + |a| \leq K + |a|$$

Somit ist die Folge a_n beschränkt durch $K + |a|$. □

Beispiele 6.1.22. Die Folge $a_n = \frac{n^2+4n}{2n^2+1}$ aus Beispiel 6.1.12 ist konvergent und somit beschränkt.

Grenzwerte von Folgen sind oft interessant, da dadurch neue Objekte (wie irrationale Zahlen) beschrieben werden können. Dabei spielt die Vollständigkeit der reellen Zahlen eine entscheidende Rolle. Ein wichtiger Satz in diesem Zusammenhang ist:

Satz 6.1.23 (Monotoniekriterium)**.** *Monotone und beschränkte Folgen sind konvergent.*

Einschub 6.1.24. ...

6.2 Reihen

Summen mit unendlich vielen Summanden gibt es nicht, aber man kann Grenzwerte von Summen mit endlich vielen Summanden betrachten.

Einschub 6.2.1. ...

Definition 6.2.2. Sei a_n eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

die *n-te Partialsumme* der **Reihe** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Die Reihe heißt konvergent, wenn die Folge s_n der Partialsummen konvergiert und man schreibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Satz 6.2.3 (Geometrische Reihe)**.** *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt für alle $x \neq 1$:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

und damit im Limes für $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis
Die Summenformel beweist man formal mit vollständiger Induktion oder intuitiver mit der folgenden Rechnung:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) \cdot (1-x) = (1+x+x^2+...+x^n)(1-x) = (1+x+...+x^n) - (x+x^2+...+x^n+x^{n+1}) = 1-x^{n+1}.$$

Ist $|x| < 1$, so konvergiert x^n gegen 0 (geometrische Folge) und somit folgt aus der Summenformel mit den Grenzwertsätzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

□

6.3 Anwendungen

6.3.1 Unendliche Dezimalbrüche

Betrachte den unendlichen Dezimalbruch

$$a_0, a_1a_2a_3... = a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k},$$

wobei $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, a_3, ... \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Dann ist die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k}$$

offensichtlich monoton wachsend, denn

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k} \qquad \leq$$

und ferner nach oben beschränkt, denn:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^{-k} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 10^{-k} \leq a_0 + \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \\ &= a_0 + \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 10^{-k} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} s_n = a_0 + \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = a_0 + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = a_0 + 1 < \infty \end{aligned}$$

Somit ist die Partialsummenfolge eines unendlichen Dezimalbruchs nach dem Monotoniekriterium konvergent und der unendliche Dezimalbruch als Limes dieser Folge wohldefiniert.

Wir betrachten nun $9{,}\overline{9}$. Dieser unendliche Dezimalbruch ist definiert als

$$9{,}\overline{9} = 9 + 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k}$$

Nach der obigen Formel ist dies

$$= 9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = 9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{\frac{9}{10}} = 10$$

Somit ist $9{,}\overline{9} = 10$.

6.3.2 Approximative Bestimmung von Nullstellen

Gegeben sei eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die *stetig* ist, d.h. für die aus $x_n \to x$ stets $f(x_n) \to f(x)$ folgt[1].

Einschub 6.3.1. ...

Es ist anschaulich klar, dass eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ in dem Intervall (a,b) mindestens eine Nullstelle x_0 haben muss (*Zwischenwerteigenschaft stetiger Funktionen*)[2]. Diese Nullstellen kann man mitunter nicht explizit ausrechnen, aber durch verschiedene numerische Verfahren approximieren:

(i) *Intervallhalbierungsmethode:* Hierbei wird eine Intervallschachtelung $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konstruiert, die die Nullstelle einschließt:

Einschub 6.3.2. ...

Setze $I_1 = [a,b]$ und bestimme $I_k = [a_k, b_k]$ für $k = 2, 3, ...$, so, dass mit Intervallmittelpunkt $m_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ von I_k gilt:

$$I_{k+1} = \begin{cases} [a_k, m_k], & \text{falls } f(m_k) \geq 0 \\ [m_k, b_k], & \text{falls } f(m_k) < 0. \end{cases}$$

Da die Intervalllänge sich in jedem Schritt halbiert, liegt eine Intervallschachtelung vor. Für die reelle Zahl x_0, die in allen I_k enthalten ist, muss dann $f(x_0) = 0$ gelten Die Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen die gesuchte Nullstelle.

---

[1] Anschaulich bedeutet die Stetigkeit von f auf dem Intervall $[a;b]$, dass man den Graphen von f, ohne den Stift abzusetzen, durchzeichnen kann.

[2] Analog geht es für $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$.

(ii) *Regula falsi:* Bestimme eine Intervallschachtelung $I_k = [a_k, b_k]$ für $k = 1, 2, ...$, wie bei der Intervallhalbierungsmethode mit $I_1 = [a, b]$, wähle aber den Unterteilungspunkt m_k nicht als Mittelpunkt des Intervalls I_k, sondern als Nullstelle der Gerade durch die Punkte $P(a_k; f(a_k))$ und $Q(b_k; f(b_k))$:

Einschub 6.3.3. ...

Gemäß der Zwei-Punkte-Form besitzt diese Gerade die Gleichung

$$y = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \cdot (x - a_k) + f(a_k)$$

und damit die Nullstelle

$$m_k = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \cdot f(a_k).$$

6.3.3 Approximation von $\sqrt{a}$

Die Quadratwurzel aus $a > 0$ lässt sich daher z.B. approximieren, indem man mit den Methoden aus 6.3.2. die Lösung der Gleichung

$$x^2 - a = 0$$

approximativ bestimmt. Verwendet man die Intervallhalbierungsmethode, so bedeutet dies, dass man die $I_k = [a_k, b_k]$ für $k = 1, 2, ...$, so bestimmt, dass mit Intervallmittelpunkt $m_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ von I_k gilt:

$$a_1^2 \leq a \leq b_1^2 \qquad \text{und} \qquad I_{k+1} = \begin{cases} [a_k, m_k], & \text{falls } m_k^2 \geq a \\ [m_k, b_k], & \text{falls } m_k^2 < a. \end{cases}$$

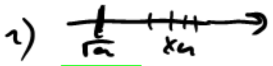
Alternativ kann man eine Intervallschachtelung zur Approximation von $\sqrt{a}$ konstruieren, indem man in jedem Schritt die nächste Nachkommastelle in der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{a}$ bestimmt. Beide Verfahren sind eher langsam, da sich bei jedem Schritt die Zahl der gültigen Stellen um höchstens Eins verbessert (*lineare Konvergenz*).

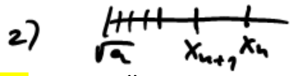
Numerisch effizienter ist die Approximation mit Hilfe des *Heron-Verfahrens*:

Einschub 6.3.4. ...

Die *Heron-Folge* x_n zur Approximation von $\sqrt{a}, a > 0$ mit Startwert $x_0 > 0$ ist rekursiv definiert durch:

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$





Die Folge x_n ist nach unten durch $\sqrt{a}$ beschränkt und monoton fallend (siehe Übungen). Daher konvergiert die Folge x_n nach dem Monotoniekriterium.

Sei x der Grenzwert von x_n, dann folgt aus der rekursiven Definition mithilfe der Grenzwertsätze, dass für x gilt:

GWS wegen Konvergenz

$$\underset{\text{Monotoniekrit}}{x =} \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n\to+\infty} x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

D.h. x erfüllt die quadratische Gleichung

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + a\right) \Leftrightarrow x^2 = a.$$

Methode klappt gut bei rekursiv definierten Folgen

Da $x > 0$ ist, folgt also $\lim_{n\to+\infty} x_n = x = \sqrt{a}$.

Bemerkung 6.3.5 (Einschub 6.3.4)**.** *Geometrisch* kann man $\sqrt{a}$ als Seitenlänge eines Quadrats mit Flächeninhalt a interpretieren. Betrachtet man ein Rechteck mit Flächeninhalt a mit einer Seite der Länge x_0, so hat die andere Seite die Länge $\frac{a}{x_0}$. Das arithmetische Mittel $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$ dieser beiden Seitenlängen liegt zwischen den beiden Seitenlängen, d.h. ein Rechteck mit Flächeninhalt a und Seitenlänge x_1 besitzt Seitenlängen, die einen kleineren Unterschied aufweisen als das Ausgangsrechteck. Iteriert man diesen Prozess, so nähern sich die Rechtecke einem Quadrat an, d.h. die Folge x_n der Seitenlängen, d.h. die Heron-Folge, konvergiert gegen $\sqrt{a}$.

Kapitel 7

Stochastik

Die Stochastik umfasst die Teilgebiete

Wahrscheinlichkeitstheorie und *Statistik*.

Die Statistik unterteilt sich in *deskriptive* und *schließende* Statistik. In der deskriptiven Statistik geht es um die Aufbereitung von Daten, in der schließenden um Aussagen über die Grundgesamtheit mithilfe von Daten, die dieser Grundgesamtheit in geeigneter Weise entnommen werden.

7.1 Deskriptive Statistik

7.1.1 Grundbegriffe der deskriptiven Statistik

Bei statistischen Untersuchungen (*Erhebungen*) werden an geeignet ausgewählten

Untersuchungseinheiten (Beobachtungseinheiten, Merkmalsträgern, Versuchseinheiten)

jeweils die Werte eines oder mehrerer *Merkmale* festgestellt.

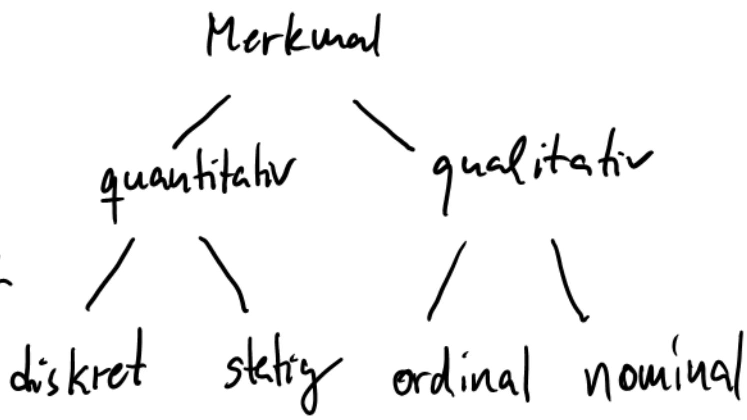
Die Werte, die ein Merkmal annehmen kann, heißen *Merkmalsausprägungen*.

Bei Merkmalen unterscheidet man:

- in natürlicher Weise zahlenmäßig erfassbare Merkmale, sogenannte *quantitative Merkmale* und
- artmäßig erfassbare, sogenannte *qualitative Merkmale*.

Sind bei einem quantitativen Merkmal die Ausprägung isolierte Zahlenwerte, so heißt das Merkmal *diskret*, können die Ausprägungen grundsätzlich jeden Wert eines Intervalls annehmen, so spricht man von *stetigen* Merkmalen.

Qualitative Merkmale unterscheidet man in solche, deren Ausprägungen eine natürliche Reihenfolge aufweisen (*ordinale Merkmale (Rangmerkmale)*, und solche, die nach rein qualitativen Gesichtspunkten klassifiziert werden (*nominale Merkmale*).



Beispiele für Merkmale:

- Familienstand: nominal
- Gewicht einer Kokosnuss: stetig
- Anzahl Haustiere in einem Haushalt: diskret
- Note in einer Bachelorarbeit: ordinal

Die Menge der Untersuchungseinheiten, über die hinsichtlich eines oder mehrerer Merkmale Aussagen getroffen werden sollen, heißt *Grundgesamtheit (oder Population)*.

Eine zufällig entnommene endliche Teilmenge der Grundgesamtheit nennt man *Stichprobe*. Erhebt man bei n Untersuchungseinheiten der Grundgesamtheit, ein oder mehrere Merkmale, so *zieht man eine Stichprobe vom Umfang n.*

Diese Stichprobe notiert man in der Reihenfolge ihrer Erhebung als *Urliste* $x_1, ..., x_n$.

Beispiel: Bei einem Leistungsstand mit ~~10~~ 11 teilnehmenden Schülern erhielt man das ~~Testergebnis~~ Noten in Form folgender Urliste:

1, 2, 1, 3, 2, 4, 5, 5, 1, 6, 3

~~58, 53, 42, 58, 48, 53 ,12, 56, 69, 29~~

$n = 11$

$x_{11} = 3$

Man versucht nun diese Daten der Urliste in einer übersichtlicheren Weise darzustellen. Dies kann durch *Graphiken* oder durch *statistische Maßzahlen* geschehen:

Einschub 7.1.1. ...

a_i	1	2	3	4	5	6	
$H_{11}(a_i)$	3	2	2	1	2	1	$\to \Sigma = 11$
$h_{11}(a_i)$	$3/11$	$2/11$	$2/11$	$1/11$	$2/11$	$1/11$	$\to \Sigma = 1$

Sei X ein Merkmal, das genau s mögliche verschiedene Ausprägungen $a_1, ..., a_s$ besitzt. Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, ..., x_n$ des Merkmals X vom Umfang n. Dann heißt

$$H_n(a_i) := \left| \underbrace{\{j \in \{1, ..., n\} \mid x_j = a_i\}} \right| =: \text{Anzahl}$$

absolute Häufigkeit der Ausprägung a_i in der Stichprobe $x_1, ..., x_n$.
Die Abbildung

$$H_n : \{a_1, ..., a_s\} \to \{0, ..., n\}, a_i \mapsto H_n(a_i)$$

heißt *absolute empirische Häufigkeitsverteilung der Stichprobe $x_1, ..., x_n$.*
Es gilt:

$$H_n(a_1) + ... + H_n(a_s) = n.$$

Der Quotient

$$h_n(a_i) := \frac{H_n(a_i)}{n} \qquad (i \in \{1, ..., s\})$$

heißt *relative Häufigkeit der Ausprägung a_i in der Stichprobe $x_1, ..., x_n$* und entsprechend die Abbildung

$$h_n : \{a_1, ..., a_s\} \to [0, 1], a_i \mapsto h_n(a_i), \qquad (i \in \{1, ..., s\})$$

relative empirische Häufigkeitsverteilung der Stichprobe $x_1, ..., x_n$. Hier gilt:

$$h_n(a_1) + ... + h_n(a_s) = 1.$$

7.2 Graphische Darstellungen von Daten

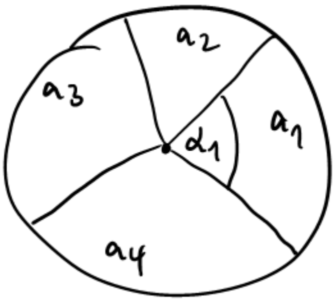
erfolgen je nach Situation unter anderem als Stabdiagramm, Kreisdiagramm oder Histogramm.

7.2.1 Kreis- und Stabdiagramm

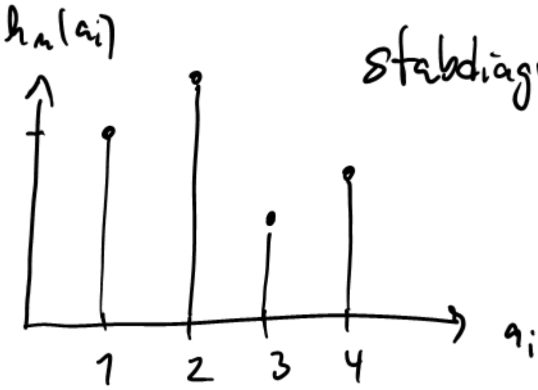
Bei den erstgenannten Darstellungen werden Stäbe bzw. Kreissektoren in einer Größe proportional zu der relativen Häufigkeit der verschiedenen Ausprägungen gezeichnet.

Einschub 7.2.1. ...

$\alpha_1 := 360° \cdot h_n(a_1)$



Kreisdiagramm



Stabdiagramm

7.2.2 Histogramm

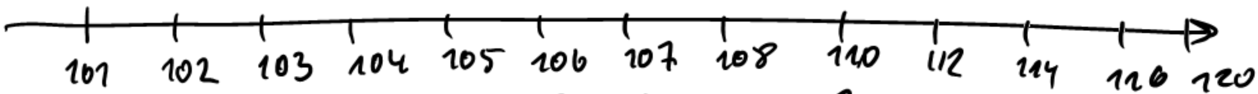
Zur Erstellung eines Histogramms wird der Wertebereich der Merkmalsausprägung (eine Teilmenge der reellen Zahlen) in sich nicht-überlappende, halboffene Intervalle $K_1, ..., K_s$ zerlegt, d.h. man wählt reelle Zahlen $k_1 < k_2 < ... < k_{s+1}$ mit

$$K_j = [k_j, k_{j+1}) := \{x \in \mathbb{R} | k_j \leq x < k_{j+1}\}, \quad 1 \leq j \leq s,$$

die alle Stichprobenwerte $x_1, ..., x_n$ enthalten.
Zum Beispiel für eine Stichprobe $x_1, \cdots, x_{25}$

min = 101
max = 120
n = 25

$$112, 102, 106, 102, 110, 105, 104, \boxed{101}, 104, 108, 107, 101, 101, 101,$$
$$105, 103, 104, 114, 105, 101, 101, 103, 116, 102, \boxed{120}$$



6 3 2 3 3 1 1 1 1 1 1 1 1

$K_1 = [101, 103)$ $K_2 = [103, 105)$ $K_3 = [105, 108)$, $K_4 = [108, 114)$ $K_5 = [114, 120]$

Ein Histogramm zu der Klasseneinteilung $K_1, ..., K_s$ ist eine graphische Darstellung der Stichprobe, die wir erhalten, indem wir über jeder Klasse $K_1, ..., K_s$ ein Rechteck errichten, dessen Fläche proportional zu der *empirischen relativen Klassenhäufigkeit*

$$h(K_1), ..., h(K_s)$$

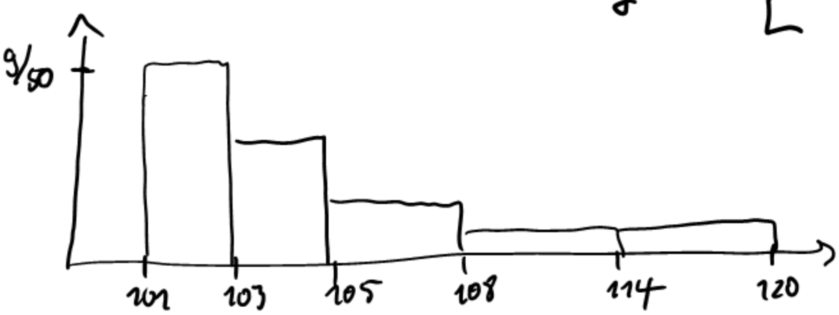
$h(K_1) = 9/25$

ist, wobei $h(K_j)$ den Anteil der Stichprobenwerte, die in K_j liegen $(1 \leq j \leq s)$ bezeichnet. Daher ist die Höhe d_j des Rechtecks über K_j gegeben durch die Gleichung

$$d_j \cdot \text{ Länge des Intervalls } K_j = d_j \cdot \overbrace{(k_{j+1} - k_j)}^{=L} = h(K_j).$$

$\Rightarrow d_j = \frac{h(K_j)}{L}$

i	1	2	3	4	5
$h(K_i)$	9/25	5/25	5/25	3/25	3/25
d_i	9/50 = 0,18	5/50 = 0,1	5/75 = 0,07	3/150 = 0,02	3/150 = 0,02



Die Wahl der Anzahl der Klassen und der Klassenbreite ist ein wenig willkürlich und sollte sich an dem Ziel, eine aussagekräftige Graphik zu erhalten, orientieren.

Faustregel 1) Anzahl Klassen $\approx \sqrt{n}$

2) keine leeren Klassen

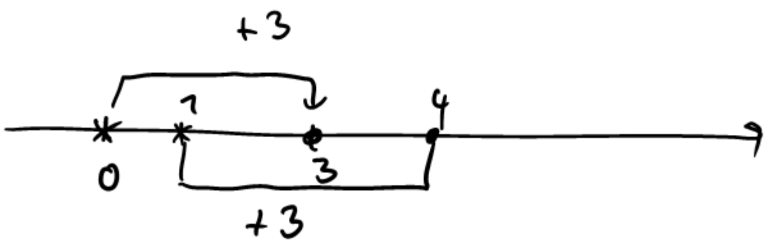
7.3 Lagemaße

Sei $x_1, ...x_n$ eine Stichprobe eines quantitativen Merkmals X.
Eine Funktion

$$\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, ...x_n) \mapsto \ell(x_1, ...x_n)$$

heißt *Lagemaß* , wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\ell(x_1 + a, ..., x_n + a) = \ell(x_1, ...x_n) + a.$$



$a = 3$

7.3.1 Arithmetisches Mittel

Das *arithmetische Mittel* $\overline{x}$ der Stichprobe $x_1, ...x_n$ ist definiert durch

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

und ist ein Lagemaß.
Das *geometrische Mittel*

$$\overline{x}_g := \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n}, \qquad x_1, ..., x_n > 0$$

und das *harmonische Mittel*

$$\overline{x}_h := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}}, \qquad x_1, ..., x_n > 0$$

hingegen nicht.
Das geometrische Mittel wird dort verwendet wo Werte multiplikativ wachsen oder wo man ~~Verhältnisse~~, ~~Raten oder~~ Prozentänderungen mittelt.

Einschub 7.3.1. ... Produkt kostet 100

$100 \xrightarrow[1J]{+50\%} 150 \xrightarrow[2J]{-50\%} 75$

AM: $\frac{1}{2}(50 + (-50)) = 0$

GM: $\sqrt[2]{1{,}5 \cdot 0{,}5} = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}866$

$\mapsto -13{,}4\%$

Das harmonische Mittel wird in der Praxis vor allem dort verwendet, wo Verhältnisse oder Raten gemittelt werden sollen.

Einschub 7.3.2. ... 2 Strecken: 60km, 60km; 40km/h, 60km/h

3) HM: $\frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{3}{120} + \frac{2}{120}} = 48$

1) AM: $\frac{1}{2}(40 + 60) = 50$

2) 60km mit 40km/h ⇝ 1,5 h
60km mit 60km/h ⇝ 1 h } 2,5 h für 120 km

$\Rightarrow \frac{120\,\text{km}}{5/2\,\text{h}} = \frac{240}{5}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 48\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

7.3.2 Modalwert

Eine Ausprägung a eines Merkmals X ist ein *Modalwert* (oder *Modus*) der Stichprobe $x_1, ..., x_n$, wenn es keine Ausprägung gibt, die in der Stichprobe häufiger vorkommt, d.h. wenn für die Häufigkeitsverteilung H_n der Stichprobe gilt:

$$H_n(a) \geq H_n(x_i) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Modalwerte sind Lagemaße, aber im Allgemeinen nicht eindeutig. Falls doch, werden sie mit x_{mod} bezeichnet und die Häufigkeitsverteilung heißt *unimodal*. Modalwerte lassen sich auch bei Stichproben von nominalen Merkmalen bestimmen.

7.3.3 Quantile

Zu $x_1, ..., x_n$ bezeichne $x_{(1)}, ..., x_{(n)}$ die *geordnete Stichprobe*, d.h. es gilt

$$\{x_1, ..., x_n\} = \{x_{(1)}, ..., x_{(n)}\} \text{ und } x_{(1)} \leq ... \leq x_{(n)}$$

Zur Beschreibung der Struktur einer Stichprobe zieht man dann sogenannte *Quantile* heran:

Definition
Sei $p \in [0,1]$. Eine Ausprägung x_p heißt p-**Quantil** der Stichprobe $x_1, ..., x_n$, wenn für die Häufigkeitsverteilung h_n gilt:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ a_i \leq x_p}} h_n(a_i) \geq p \qquad \text{und} \qquad \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ a_i \geq x_p}} h_n(a_i) \geq 1-p, \qquad (\star)$$

d.h. mindestens $p \cdot 100\%$ der Stichprobenwerte sind $\leq x_p$ und mindestens $(1-p) \cdot 100\%$ der Stichprobenwerte sind $\geq x_p$.

Bemerkung

- Für $p = \frac{1}{2}$ heißt das p-Quantil $x_{0,5}$ *Median* (oder *Zentralwert*),

  d.h. mindestens 50 % der Stichprobenwerte sind größer gleich und mindestens 50 % sind kleiner gleich $x_{0,5}$.
- Das $\frac{1}{4}$-Quantil $x_{0,25}$ heißt *unteres Quartil*, das $\frac{3}{4}$-Quantil $x_{0,75}$ *oberes Quartil*.
- $x_{j \cdot 0,1}$ heißt *j-tes Dezil*.
- Im Fall $p = 0$ erhält man den kleinsten Wert, das *Minimum* $x_{min} = x_{(1)}$ der Stichprobe, im Fall $p = 1$ den größten Wert, das *Maximum* $x_{max} = x_{(n)}$.

Alle p-Quantile sind Lagemaße. Verglichen mit dem arithmetischen Mittel ist der Median robuster (d.h. weniger anfällig) gegenüber „Ausreißern".

Satz 7.3.3 (Berechnung des p-Quantils). *Sei $0 < p < 1$. Eine Ausprägung a ist genau dann ein p-Quantil der Stichprobe $x_1, ..., x_n$, wenn gilt:*

$$a = x_{(\lceil np \rceil)}, \quad \textit{falls } np \notin \mathbb{N} \qquad \textit{bzw.} \qquad x_{(np)} \leq a \leq x_{(np+1)}, \quad \textit{falls } np \in \mathbb{N}, \qquad (\star\star).$$

Hierbei steht $\lceil x \rceil$ für die kleinste ganze Zahl größer oder gleich x.

Insbesondere gilt für den Median $x_{0,5}$ somit

$$x_{0,5} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \textit{falls } n \textit{ ungerade,} \\ a, & \textit{falls } n \textit{ gerade und } a \textit{ eine Ausprägung} \\ & \textit{mit } x_{\left(\frac{n}{2}\right)} \leq a \leq x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \textit{ ist.} \end{cases}$$

Einschub 7.3.4. ...